

Capitolo 3

Spazi metrici

3.1 Metrica

Sia W un insieme e u, v due suoi elementi. Si definisce *distanza* o *metrica* su W una funzione $d(u, v)$ che ad ogni coppia di elementi di W fa corrispondere un numero reale tale che

- a) $d(u, v) \geq 0$, con $d(u, v) = 0$ se e solo se $u = v$,
- b) $d(u, v) = d(v, u)$,
- c) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$, $\forall u, v, w \in W$.

Un insieme dotato di una distanza così definita si dice *spazio metrico*.

- Esempi

1) Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}$, definiamo la distanza tra due numeri reali x, y come

$$d(x, y) = |x - y|.$$

È immediato verificare che questa distanza è una metrica in $\mathbb{R}$. Lo stesso vale per un qualunque intervallo $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

2) Dato lo spazio vettoriale euclideo E_n , definiamo

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_n.$$

La distanza così introdotta in E_n è una metrica infatti si ha

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| &\geq 0, \quad \text{con} \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = 0, \quad \text{se e solo se} \quad \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}. \\ \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| &= \sqrt{(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})} = \sqrt{(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u})} = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|, \\ \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| &= \|\mathbf{u} - \mathbf{w} + \mathbf{w} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| + \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| \quad (\text{per la diseg. triang.}), \end{aligned}$$

e lo spazio E_n assume la struttura di spazio metrico.

3) Sia $C([a, b])$ lo spazio delle funzioni reali di variabile reale continue in $[a, b]$. Date due funzioni $f, g \in C([a, b])$, definiamo

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Questa definizione ha senso in quanto le funzioni di $C([a, b])$ sono limitate in $[a, b]$. Sono inoltre soddisfatti i requisiti della metrica, in quanto,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| &\geq 0, \quad (= 0 \text{ se e solo se } f(x) = g(x) \text{ identicamente}), \\ \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| &= \sup_{x \in [a, b]} |g(x) - f(x)|, \\ \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| &= \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \\ &\leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |h(x) - g(x)|, \end{aligned}$$

quindi lo spazio $C([a, b])$ assume, con la definizione data, la struttura di spazio metrico. Questa metrica si dice anche metrica della *convergenza uniforme*. Tale denominazione sarà chiarita in seguito.

4) Sia $\mathbb{C}^n$ l'insieme delle n -uple ordinate di numeri complessi $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. Poniamo

$$d(\mathbf{z}, \mathbf{z}') = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i - z'_i|^2}.$$

Con questa distanza $\mathbb{C}^n$ assume la struttura di spazio metrico. La verifica delle proprietà a)-c) segue dalle proprietà dei moduli dei numeri complessi ed è immediata.

Nel seguito chiameremo semplicemente *punti* gli elementi di uno spazio metrico.

Consideriamo uno spazio metrico W ed una successione di punti $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di W . Diremo che $\{y_n\}$ converge al punto $y \in W$ e scriveremo $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, se, fissato un $\varepsilon > 0$, esiste un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tale che per $n > \nu$ si abbia

$$d(y_n, y) < \varepsilon,$$

essendo d la metrica di W . In altri termini, la convergenza di una successione di punti in W è equivalente alla convergenza della successione numerica

$$\eta_n = d(y_n, y),$$

a zero.

Si dice che una successione $\{y_n\}$ di punti di uno spazio metrico è *di Cauchy* (o *fondamentale*) se, fissato un $\varepsilon > 0$, esiste un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni coppia di indici $n, m > \nu$ si abbia

$$d(y_n, y_m) < \varepsilon.$$

Osserviamo subito che ogni successione convergente in uno spazio metrico W è di Cauchy. Infatti, dalle proprietà della metrica e dall'ipotesi di convergenza, abbiamo

$$d(y_n, y_m) \leq d(y_n, y) + d(y, y_m) = d(y_n, y) + d(y_m, y) < 2\varepsilon,$$

per ogni coppia di indici $n, m > \nu$. Viceversa è possibile avere successioni fondamentali che non sono convergenti. Per esempio, l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ con la metrica

$$d(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

è uno spazio metrico. Consideriamo la successione in $\mathbb{Q}$

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Essa risulta di Cauchy, in quanto, posto $m = n + p$, si ha

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \left(1 + \frac{1}{n+p}\right)^{n+p} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+p} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1\right] < 3 \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1\right]. \end{aligned}$$

Fissato un $\varepsilon > 0$, e comunque preso p , si può certamente trovare un ν tale che per ogni $n > \nu$ l'ultimo termine della disuguaglianza precedente venga maggiorato da ε . Ne segue che

$$\left| \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right| < \varepsilon, \quad \forall n, m > \nu,$$

e quindi la successione data è fondamentale. D'altra parte sappiamo che questa successione numerica converge al numero e che non appartiene a $\mathbb{Q}$. La successione non è dunque convergente in $\mathbb{Q}$.

3.2 Convergenza uniforme

Uno spazio metrico W si dice *completo* se ogni successione di Cauchy di punti di W è convergente.

Introdotta la metrica $d(x, y) = |x - y|$ in $\mathbb{R}$ consideriamo un intervallo chiuso $[a, b]$. Dimostriamo che $[a, b]$ è uno spazio metrico completo. A tale scopo consideriamo una successione $\{x_n\}$ di punti di $[a, b]$ che sia di Cauchy. Tale successione sarà ovviamente limitata ed ammetterà quindi una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a un punto $\bar{x}$ di $[a, b]$, ovvero esisterà un $k_1 \in \mathbb{N}$ tale che $|x_{n_k} - \bar{x}| < \frac{\varepsilon}{2}$ per $k > k_1$. D'altra parte, essendo $\{x_n\}$ di Cauchy, avremo che per $n, m > \nu$, $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Detto k_2 un indice tale che $\nu < n_{k_2}$, prendiamo $\bar{k} \geq \max\{k_1, k_2\}$ e avremo

$$|x_n - \bar{x}| = |x_n - x_{n_{\bar{k}}} + x_{n_{\bar{k}}} - \bar{x}| \leq |x_n - x_{n_{\bar{k}}}| + |x_{n_{\bar{k}}} - \bar{x}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

per $n > n_{\bar{k}}$. Otteniamo così la convergenza di $\{x_n\}$ a $\bar{x}$.

Teorema 3.1 *L'insieme delle funzioni continue $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$, con la metrica $d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$, è uno spazio metrico completo.*

Dim. Introduciamo la metrica $d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$ negli intervalli $[a, b]$ e $[c, d]$. Consideriamo una successione di Cauchy $\{f_n\}$ di funzioni continue $f_n : [a, b] \rightarrow [c, d]$ e dimostriamo che f_n converge ad una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$. Fissato $\bar{x} \in [a, b]$, avremo

$$d(f_n(\bar{x}), f_m(\bar{x})) = |f_n(\bar{x}) - f_m(\bar{x})| \leq d(f_n, f_m) < \varepsilon, \quad n, m > \nu,$$

e quindi la successione numerica $\{f_n(\bar{x})\}$ è di Cauchy. Poiché $[c, d]$ è completo, tale successione sarà convergente ad un certo numero di $[c, d]$, che indicheremo con $f(\bar{x})$. Poiché questo risultato vale per ogni scelta di $\bar{x} \in [a, b]$, rimane così definita una funzione $f(x)$ da $[a, b]$ in $[c, d]$ che è il limite di $\{f_n(x)\}$. Facciamo vedere che f è continua. Preso $x_0 \in [a, b]$, per la proprietà c) della metrica avremo

$$|f(x) - f(x_0)| \leq d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f(x_0)), \quad \forall x \in [a, b].$$

Per quanto detto finora, fissato $\varepsilon > 0$, esisterà un indice ν tale che, per $n > \nu$ e per ogni $x \in [a, b]$,

$$d(f(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad d(f(x_0), f_n(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Scelto allora $\bar{n} > \nu$, possiamo scrivere

$$d(f(x), f(x_0)) < \frac{2}{3}\varepsilon + d(f_{\bar{n}}(x), f_{\bar{n}}(x_0)).$$

Ma $f_{\bar{n}}(x)$ è continua in x_0 , quindi esisterà un intorno $I_\delta(x_0)$ tale che $|f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$, o, equivalentemente, $x \in I_\delta(x_0) \Rightarrow d(f_{\bar{n}}(x), f_{\bar{n}}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$. In conclusione avremo

$$|f(x) - f(x_0)| \leq d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon, \quad \forall x \in I_\delta(x_0),$$

ovvero la continuità di $f(x)$.

La convergenza di una successione di funzioni $f_n(x)$ alla funzione $f(x)$, secondo la metrica $d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$, si dice *convergenza uniforme*. Questo tipo di convergenza differisce dalla semplice convergenza *puntuale* di una successione di funzioni. Per chiarire questo concetto osserviamo che, fissato un $\bar{x} \in [a, b]$, la disuguaglianza

$$|f_n(\bar{x}) - f(\bar{x})| < \varepsilon, \quad \text{per } n > \nu,$$

comporta la convergenza della successione numerica $f_n(\bar{x})$ a $f(\bar{x})$. Il numero ν dipenderà da $\bar{x}$. Se allora accade che

$$\forall x \in [a, b], \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{per } n > \nu(x),$$

avremo la convergenza *puntuale* di f_n a f nell'intervallo $[a, b]$. La convergenza uniforme richiede invece che, per $n > \nu$, sia soddisfatta la disuguaglianza (che non è più condizionata dal valore di x in $[a, b]$),

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Poiché si ha

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = d(f_n, f),$$

la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale in $[a, b]$. Tuttavia una successione di funzioni può convergere puntualmente in un intervallo ma non essere, in quello stesso intervallo, uniformemente convergente.

• Esempio

Consideriamo la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}, \quad x \in [0, 1], \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Tale successione converge puntualmente a $f(x) = 0$ in $[0, 1]$ in quanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha \bar{x} e^{-n\bar{x}} = 0, \quad \forall \bar{x} \in [0, 1].$$

Consideriamo ora la convergenza uniforme e calcoliamo

$$d(f_n, 0) = \sup_{x \in [0, 1]} |n^\alpha x e^{-nx}| = \max_{x \in [0, 1]} (n^\alpha x e^{-nx}).$$

Considerata come funzione di $x \in [0, 1]$, f_n ha un massimo assoluto in $x = \frac{1}{n}$, da cui

$$d(f_n, 0) = \frac{n^{\alpha-1}}{e}.$$

Se $\alpha < 1$ la successione di funzioni convergerà uniformemente a 0, mentre, se $\alpha \geq 1$, $f_n(x)$ non convergerà uniformemente.

3.3 Teorema delle contrazioni

Sia W uno spazio metrico. Consideriamo una funzione $F : W \rightarrow W$ tale che

$$d(F(u), F(v)) \leq \alpha d(u, v), \quad \forall u, v \in W,$$

con $\alpha \in (0, 1)$. Ogni funzione F che soddisfa questa proprietà si dice una *contrazione* in W .

Teorema 3.2 (*delle contrazioni*). *Dato uno spazio metrico completo W ed una contrazione $F : W \rightarrow W$, esiste un unico punto $\bar{u} \in W$, detto punto fisso di F , tale che*

$$F(\bar{u}) = \bar{u}.$$

Dim. Sia $u_0 \in W$. Costruiamo la successione di punti in W

$$u_1 = F(u_0), \quad u_2 = F(u_1), \quad \dots \quad u_n = F(u_{n-1}), \quad \dots$$

Poiché, per ipotesi, F è una contrazione, avremo

$$d(u_{n+1}, u_n) = d(F(u_n), F(u_{n-1})) \leq \alpha d(u_n, u_{n-1}).$$

Da questa, per induzione, otteniamo

$$d(u_{n+1}, u_n) \leq \alpha^n d(u_1, u_0).$$

Prendiamo un $m > n$. Applicando $m - n$ volte la disuguaglianza triangolare, abbiamo

$$\begin{aligned} d(u_{m+1}, u_n) &\leq d(u_{m+1}, u_m) + d(u_m, u_{m-1}) + \dots + d(u_{n+1}, u_n) \\ &\leq (\alpha^m + \alpha^{m-1} + \dots + \alpha^n) d(u_1, u_0) \\ &= \alpha^n (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-n}) d(u_1, u_0) = \alpha^n \frac{1 - \alpha^{m-n+1}}{1 - \alpha} d(u_1, u_0) \\ &< \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(u_1, u_0). \end{aligned}$$

Per n sufficientemente grande l'ultimo termine di questa disuguaglianza può essere reso piccolo a piacere, quindi la successione $\{u_n\}$ è di Cauchy. Poiché W è completo, essa è anche convergente e chiameremo $\bar{u}$ il suo limite.

Dimostriamo ora che $\bar{u}$ è un punto fisso per F . Posto $F(\bar{u}) = u^*$, consideriamo la distanza $d(\bar{u}, u^*)$. Si ha

$$d(\bar{u}, u^*) \leq d(\bar{u}, u_n) + d(u_n, u_{n+1}) + d(u_{n+1}, u^*).$$

Poiché $\{u_n\}$ converge a $\bar{u}$, fissato un $\varepsilon > 0$, si può trovare un $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tale che, per $n > \nu_1$

$$d(\bar{u}, u_n) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'altra parte, essendo $\{u_n\}$ di Cauchy, esisterà un $\nu_2 \in \mathbb{N}$ tale che, per $n > \nu_2$,

$$d(u_n, u_{n+1}) < \frac{\varepsilon}{3},$$

ed inoltre, per $n > \nu_1$,

$$d(u_{n+1}, u^*) = d(F(u_n), F(\bar{u})) \leq \alpha d(u_n, \bar{u}) < \frac{\varepsilon}{3} \alpha < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ne segue che, per $n > \max\{\nu_1, \nu_2\}$,

$$d(\bar{u}, u^*) < \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε si ha allora $\bar{u} = u^*$.

Dimostriamo infine che il punto fisso è unico. Se infatti esistesse un altro punto $\hat{u}$ tale che $F(\hat{u}) = \hat{u}$, allora si avrebbe

$$d(\bar{u}, \hat{u}) = d(F(\bar{u}), F(\hat{u})) \leq \alpha d(\bar{u}, \hat{u}) \quad \Rightarrow \quad d(\bar{u}, \hat{u})(1 - \alpha) \leq 0.$$

Ma $\alpha < 1$ per ipotesi, quindi deve essere

$$d(\bar{u}, \hat{u}) = 0, \quad \Rightarrow \quad \hat{u} = \bar{u}.$$

Capitolo 4

Equazioni differenziali

4.1 Equazioni del primo ordine

Una equazione differenziale di ordine n per la funzione $y(t)$ è una equazione in cui compaiono le derivate, al più di ordine n , della funzione $y(t)$. In generale essa ha la forma

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Qualora sia possibile esplicitare la derivata di ordine massimo come funzione di t , di $y(t)$ e di tutte le derivate di ordine minore di n , l'equazione differenziale si può porre nella forma

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

detta *forma normale*.

- Esempio

L'equazione

$$(y^{(4)} - 1)(y^{(5)} - t) + 2e^t y' = 0$$

è una equazione differenziale di ordine 5. Essa si può porre in forma normale. Infatti è possibile dividere l'equazione per $(y^{(4)} - 1)$, in quanto, se fosse $y^{(4)} = 1$, integrando quattro volte, si avrebbe $y = \frac{1}{24}t^4 + \frac{1}{6}c_1 t^3 + \frac{1}{2}c_2 t^2 + c_3 t + c_4$. Sostituendo si otterrebbe l'eguaglianza

$$\left(\frac{1}{3}t^3 + c_1 t^2 + 2c_2 t + 2c_3\right) e^t = 0,$$

la quale non è identicamente soddisfatta per alcuna scelta delle costanti c_1, c_2, c_3 . Si può scrivere allora

$$y^{(5)} = t - \frac{2e^t y'}{y^{(4)} - 1},$$

che è la forma normale dell'equazione di partenza.

Una equazione del primo ordine in forma normale si scrive

$$y' = f(t, y)$$

Nel caso più semplice, in cui f non dipende da y , l'equazione si risolve immediatamente tramite una integrazione, in quanto y risulta essere una primitiva di f , e si ha

$$y' = f(t), \quad \Rightarrow \quad y = \int f(t) dt.$$

La funzione y sarà individuata in modo univoco se si conosce il suo valore per un determinato valore di t , per esempio t_0 , e si ha

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau.$$

L'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ si dice *integrale generale* mentre ogni soluzione soddisfacente la condizione $y(t_0) = y_0$ con y_0 assegnato, si dice un *integrale particolare*. Più avanti, sotto opportune ipotesi, dimostreremo l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione $y' = f(t, y)$ una volta assegnata la condizione $y(t_0) = y_0$. Nella pratica però, spesso non si riesce a trovare l'integrale generale o una soluzione particolare di una equazione differenziale. Esistono inoltre metodi sistematici di soluzione solo nei casi più semplici come quello delle equazioni lineari, che saranno studiati in seguito.

Uno dei casi in cui è possibile integrare una equazione del primo ordine in forma normale è quello in cui la funzione $f(t, y)$ può essere fattorizzata come $f(t, y) = f_1(t)f_2(y)$. In questo caso si dice che l'equazione

$$y' = f_1(t)f_2(y),$$

è a *variabili separabili*. Se si conosce una primitiva F_2 di $1/f_2(y)$ ed una primitiva F_1 di $f_1(t)$, allora l'equazione precedente può essere così integrata

$$\begin{aligned} \frac{y'}{f_2(y)} = f_1(t), \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(t) dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(t) dt \\ \Rightarrow \quad F_2(y) = F_1(t) + c. \end{aligned}$$

L'ultima equazione rappresenta, in forma implicita, l'integrale generale della equazione di partenza. Se la funzione F_2 è invertibile, allora si ottiene l'integrale generale in forma esplicita

$$y(t) = F_2^{-1}[F_1(t) + c].$$

Assegnato $y(0) = y_0$, si ottiene una soluzione particolare con

$$c = F_2(y_0) - F_1(0).$$

• Esempi

1) Trovare l'integrale generale dell'equazione $y' = y/t$. Separando le variabili si ottiene

$$\frac{dy}{y} = \frac{dt}{t} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t},$$

da cui si ricava

$$\ln |y| = \ln |t| + c \quad \Rightarrow \quad |y| = k|t|,$$

dove $k = e^c$. Questa soluzione si può sempre scrivere nella forma

$$y = k_1 t, \quad k_1 \neq 0.$$

Osserviamo che nel separare le variabili abbiamo diviso per y , perdendo così la soluzione particolare $y = 0$. Possiamo inglobare questa soluzione nell'integrale generale trovato, eliminando la restrizione $k_1 \neq 0$.

2) Trovare la soluzione particolare dell'equazione

$$y' = (1 + y^2) \sin t,$$

soddisfacente alla *condizione iniziale* $y(0) = 1$. L'equazione è a variabili separabili. Possiamo dividere ambo i membri per $(1 + y^2)$ che è sempre diverso da zero, ottenendo

$$\frac{dy}{1 + y^2} = \sin t \, dt \quad \Rightarrow \quad \arctan y = -\cos t + c,$$

da cui ricaviamo, esplicitamente, l'integrale generale, $y(t) = \tan(-\cos t + c)$. Imponendo la condizione iniziale si ha

$$\arctan 1 = -\cos 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\pi}{4} + 1.$$

La soluzione richiesta è dunque,

$$y(t) = \tan\left(1 + \frac{\pi}{4} - \cos t\right).$$

Certe equazioni possono essere ricondotte nella forma a variabili separabili. Per esempio l'equazione

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

detta di tipo *omogeneo*, può essere risolta mediante la sostituzione $y = tz$. In tal modo si ha $y' = z + tz'$ e l'equazione diventa una equazione a variabili separabili per la funzione $z(t)$,

$$z't = f(z) - z, \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dt}{t}.$$

L'integrale generale si può allora esprimere in forma implicita come

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \ln |t| + c.$$

Un altro esempio è quello delle equazioni nella forma

$$y' = f(at + by).$$

In tal caso infatti, effettuando la sostituzione $z = at + by$, si ha $y' = (z' - a)/b$ e quindi

$$\frac{dz}{bf(z) + a} = dt \quad \Rightarrow \quad t = \int \frac{dz}{bf(z) + a}.$$

- Esempi

1) Determinare l'integrale generale della equazione

$$y' = \frac{y^2 + ty + t^2}{t^2}.$$

Si tratta di una equazione omogenea in quanto il secondo membro si può scrivere come $z^2 + z + 1$, essendo $z = y/t$. Effettuando la sostituzione e integrando si ottiene

$$\frac{z'}{z^2 + 1} = \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad \arctan z = \ln |t| + c,$$

da cui

$$z(t) = \tan(\ln |t| + c) \quad \Rightarrow \quad y(t) = t \tan(\ln |t| + c).$$

2) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y' = \frac{1}{t - y} + 1.$$

Effettuiamo la sostituzione $t - y = z$. Otteniamo

$$z' = -\frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad z dz = -dt,$$

da cui, integrando, si ricava l'integrale generale

$$z^2 = -2t + c \quad \Rightarrow \quad (t - y)^2 = -2t + c.$$

Una equazione del primo ordine in forma normale si dice *lineare* se $f(t, y)$ è una funzione lineare di y cioè se

$$f(t, y) = q(t) + p(t)y.$$

Supporremo qui che le funzioni $p(t)$ e $q(t)$ siano continue in un dominio $D \subseteq \mathbb{R}$. L'equazione lineare

$$y' - p(t)y = q(t),$$

si dice *omogenea* se $q(t)$ è identicamente nulla. In quest'ultimo caso l'equazione è a variabili separabili e si ha

$$\frac{dy}{y} = p(t) dt, \quad \Rightarrow \quad \ln |y| = \int p(t) dt + c = P(t) + c,$$

dove con $P(t)$ abbiamo indicato una primitiva di $p(t)$. Si ricava così l'integrale generale dell'equazione omogenea,

$$\bar{y}(t) = ke^{P(t)},$$

dove $k \in \mathbb{R}$. Osserviamo in particolare che la soluzione $\bar{y} = 0$, persa nella separazione di variabili, si ottiene per $k = 0$.

L'integrazione dell'equazione non omogenea si può effettuare mediante il cosiddetto metodo della *variazione della costante*, una volta noto l'integrale generale dell'equazione omogenea corrispondente, detta *equazione omogenea associata*. A questo scopo cerchiamo una soluzione particolare nella forma

$$\hat{y}(t) = k(t)e^{P(t)},$$

dove $k(t)$ è una funzione continua tale che $k(t_0) = 0$, con $t_0 \in D$. Verifichiamo che tale soluzione esiste e calcoliamo $k(t)$. Sostituendo nell'equazione di partenza otteniamo infatti

$$[k'(t) + k(t)p(t)]e^{P(t)} - p(t)k(t)e^{P(t)} = q(t),$$

da cui

$$k'(t) = q(t)e^{-P(t)}.$$

Integrando sull'intervallo $[t_0, t] \subseteq D$ e ricordando che $k(t_0) = 0$, otteniamo

$$k(t) = \int_{t_0}^t q(\tau)e^{-P(\tau)} d\tau.$$

Abbiamo così dimostrato che

$$\hat{y}(t) = e^{P(t)} \int_{t_0}^t q(\tau)e^{-P(\tau)} d\tau$$

è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Consideriamo ora una qualsiasi altra soluzione $\tilde{y}(t)$ dell'equazione non omogenea. Poiché si ha contemporaneamente

$$\begin{aligned}\tilde{y}' &= p(t)\tilde{y} + q(t) \\ \hat{y}' &= p(t)\hat{y} + q(t).\end{aligned}$$

sottraendo membro a membro queste due eguaglianze, otteniamo

$$\tilde{y}' - \hat{y}' = p(t)(\tilde{y} - \hat{y}).$$

Ne segue che $\tilde{y} - \hat{y}$ è soluzione dell'equazione omogenea associata, cioè esiste una costante k per cui $\tilde{y} - \hat{y} = ke^{P(t)}$. Concludiamo allora che tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea hanno la forma

$$y(t) = ke^{P(t)} + \hat{y} = ke^{P(t)} + e^{P(t)} \int_{t_0}^t q(\tau)e^{-P(\tau)} d\tau.$$

In altri termini, l'integrale generale dell'equazione non omogenea è dato dalla somma della soluzione particolare $\hat{y}(t)$ e dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata. Più avanti generalizzeremo questa conclusione al caso di equazioni lineari di qualsiasi ordine.

• Esempi

- 1) Determinare l'integrale generale dell'equazione lineare

$$y' + y \tan t = \frac{1}{\sin t}.$$

Ricaviamo prima la soluzione dell'omogenea associata

$$y' = -y \tan t \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = -\tan t,$$

da cui, integrando,

$$\ln |y| = \ln |\cos t| + c \Rightarrow \bar{y} = k \cos t, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Facciamo variare la costante ponendo $k = k(t)$. Abbiamo

$$y = k(t) \cos t \Rightarrow y' = k' \cos t - k \sin t.$$

Sostituendo nell'equazione non omogenea ricaviamo

$$k'(t) = \frac{1}{\sin t \cos t},$$

da cui integrando,

$$k(t) = -\ln |\cos t| + \ln |\sin t| + k_1 = -\ln |\cot t| + k_1.$$

Ne segue l'integrale generale della non omogenea

$$y(t) = k_1 \cos t - \cos t \ln |\cot t|.$$

2) Determinare l'integrale generale dell'equazione lineare

$$y' + 2ty = t + t^3.$$

Dalla omogenea associata si ricava $y = ke^{-t^2}$ con $k \in \mathbb{R}$. Facendo variare la costante si ha $y' = (k' - 2kt)e^{-t^2}$. Sostituendo si ottiene

$$k' = (t + t^3)e^{t^2},$$

la cui integrazione fornisce

$$k(t) = \frac{1}{2}t^2e^{t^2} + k_1.$$

Si ottiene così l'integrale generale della non omogenea

$$y = k_1 e^{-t^2} + \frac{1}{2}t^2.$$

Alcune equazioni differenziali del primo ordine in forma normale possono essere ridotte mediante una opportuna sostituzione ad equazioni lineari. Consideriamo per esempio l'*equazione di Bernoulli*

$$y' + p(t)y = f(t)y^n, \quad \text{con } n \neq 1.$$

Se dividiamo per y^n (osserviamo che $y = 0$ è comunque soluzione), abbiamo

$$y'y^{-n} + p(t)y^{1-n} = f(t).$$

Posto $z = y^{1-n}$, otteniamo $z' = (1-n)y'y^{-n}$ da cui, sostituendo troviamo una equazione lineare per z ,

$$\frac{1}{1-n}z' + p(t)z = f(t).$$

Consideriamo l'equazione di Riccati

$$y' + p(t)y + q(t)y^2 = f(t).$$

È possibile trasformare questa equazione in una equazione di Bernoulli e quindi in una equazione lineare. Per raggiungere tale scopo è necessario però conoscere una soluzione particolare $y_1(t)$ dell'equazione di Riccati. Posto $y = y_1 + z$, si ha

$$y_1' + z' + p(t)(y_1 + z) + q(t)(y_1 + z)^2 = f(t),$$

e sfruttando il fatto che y_1 è una soluzione, ci si riduce all'equazione

$$z' + [p(t) + 2q(t)y_1]z + q(t)z^2 = 0,$$

che è una equazione di Bernoulli.

Oltre a singole equazioni differenziali studieremo i sistemi di equazioni differenziali, le cui incognite sono n -uple di funzioni $y_i(t)$, ($i = 1, \dots, n$). Un sistema di equazioni differenziali del primo ordine in forma normale può essere scritto come

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

L'integrale generale del sistema è costituito da tutte le n -uple $y_i(t)$, ($i = 1, \dots, n$) che soddisfano tutte le equazioni del sistema. Si può dare una forma più compatta alle equazioni precedenti introducendo una funzione vettoriale $\mathbf{y}(t)$ di componenti $y_i(t)$, ($i = 1, \dots, n$) a valori in $\mathbb{R}^n$ ed una funzione vettoriale di $n + 1$ variabili $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Scriveremo allora

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}).$$

È importante osservare che se sappiamo risolvere un sistema di equazioni differenziali del primo ordine in forma normale, possiamo anche risolvere equazioni o sistemi di equazioni in forma normale di ordine superiore al primo. Consideriamo il seguente esempio. L'equazione

$$y^{(4)} + 2y''y'e^y = t(1 + y''),$$

è del quarto ordine e può essere espressa in forma normale. Poniamo

$$y =: u_1, \quad y' = u_1' =: u_2, \quad y'' = u_2' =: u_3, \quad y''' = u_3' =: u_4.$$

L'equazione data si può scrivere nella forma di un sistema per u_1, u_2, u_3, u_4 , cioè

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ u_3' &= u_4 \\ u_4' &= -2u_3u_2e^{u_1} + t(1 + u_3), \end{aligned}$$

ovvero nella forma

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}),$$

dove

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4), \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4),$$

con

$$\begin{aligned} f_1(t, u_1, u_2, u_3, u_4) &= u_2, & f_2(t, u_1, u_2, u_3, u_4) &= u_3, \\ f_3(t, u_1, u_2, u_3, u_4) &= u_4, & f_4(t, u_1, u_2, u_3, u_4) &= -2u_3u_2e^{u_1} + t(1 + u_3). \end{aligned}$$

In generale, una equazione di ordine k in forma normale si può trasformare in un sistema di k equazioni del primo ordine in forma normale.

4.2 Teorema di esistenza e unicità

Consideriamo un sistema di equazioni differenziali del primo ordine in forma normale

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}),$$

e supponiamo di avere assegnato il valore della funzione vettoriale $\mathbf{y}(t)$ per $t = t_0$, ovvero $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0$. Si dice *problema di Cauchy* il sistema

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0, \end{cases}$$

formato dall'equazione differenziale vettoriale per la funzione $\mathbf{y}(t)$, in forma normale e dalla condizione iniziale imposta su tale funzione. Sotto opportune ipotesi di regolarità della funzione vettoriale $\mathbf{f}$ e della funzione $\mathbf{y}(t)$ si può dimostrare che esiste una ed una sola soluzione al problema di Cauchy.

Consideriamo per il momento il caso di una sola equazione differenziale per la funzione $y(t)$ e scriviamo il problema di Cauchy nella forma

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Supponiamo che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sia continua e integriamo tra t_0 e t ambo i membri dell'equazione differenziale. La funzione $y(t)$ risulterà soddisfare l'equazione integrale

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau.$$

D'altra parte, se $y(t)$ è una funzione continua con derivata continua, che sia soluzione di questa equazione integrale, allora risulta $y(t_0) = y_0$ e $y' = f(t, y(t))$, cioè essa è soluzione del problema di Cauchy. In sintesi possiamo dire che una funzione $y(t)$ con derivata continua è soluzione del problema di Cauchy se e solo se soddisfa l'equazione integrale precedente.

Cerchiamo soluzioni $y(t) \in C^1(D)$, essendo $D = \{t \in \mathbb{R} : |t - t_0| \leq \delta\}$. Poiché tali funzioni sono limitate e $y(t_0) = y_0$, esse assumeranno valori in un dominio B esprimibile come

$$B = \{y \in \mathbb{R} : |y - y_0| \leq b\},$$

e di conseguenza l'insieme delle possibili soluzioni del problema di Cauchy sarà

$$W = \{y(t) \in C^1(D) \mid y : D \rightarrow B\}.$$

Nell'ipotesi che f sia continua in $D \times B$ essa sarà limitata, cioè

$$|f(t, y)| \leq M, \quad \forall (t, y) \in D \times B.$$

Diremo poi che f soddisfa la *condizione di Lipschitz* se esiste un $\eta > 0$ tale che

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq \eta |y_1 - y_2|, \quad \forall t \in D, \quad \forall y_1, y_2 \in B.$$

Tenuto conto di tutte queste osservazioni, possiamo dimostrare il seguente risultato.

Teorema 4.1 *Esiste una ed una sola soluzione $y \in W$ al problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

con f continua e soddisfacente la condizione di Lipschitz.

Dim. Nell'insieme $C^1(D)$ introduciamo la metrica

$$d(y_1, y_2) = \sup_{t \in D} |y_1(t) - y_2(t)| = \max_{t \in D} |y_1(t) - y_2(t)|.$$

Per il teorema 3.1 il sottoinsieme W con la suddetta metrica è uno spazio metrico completo. Consideriamo la funzione F definita in W da

$$F(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau.$$

Poiché f è continua in D , per ogni scelta di y in W , la funzione $F(y)(t)$ risulta avere derivata prima continua. Inoltre, scelto $\delta \leq b/M$, si ha

$$\left| \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(\tau, y(\tau))| d\tau \right| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq b,$$

quindi le funzioni $F(y)(t)$, ottenute scegliendo y in W , hanno valori in B . Riassumendo, fissato b e scelto $\delta \leq b/M$, si ha $F : W \rightarrow W$.

Dimostriamo ora che, precisato ulteriormente δ , e cioè scelto $\delta < \min\{1/\eta, b/M\}$, F è una contrazione. Infatti, tenuto conto della condizione di Lipschitz, $\forall y_1, y_2 \in W$, si ha

$$\begin{aligned} |F(y_1) - F(y_2)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))] d\tau \right| \leq \\ &\left| \int_{t_0}^t |f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))| d\tau \right| \leq \eta \left| \int_{t_0}^t |y_1(\tau) - y_2(\tau)| d\tau \right| \leq \\ &\eta |t - t_0| \max_{t \in D} |y_1(t) - y_2(t)| \leq \eta \delta \max_{t \in D} |y_1(t) - y_2(t)|, \end{aligned}$$

da cui otteniamo

$$d(F(y_1), F(y_2)) = \max_{t \in D} |F(y_1) - F(y_2)| \leq \eta \delta \max_{t \in D} |y_1(t) - y_2(t)| = \alpha d(y_1, y_2),$$

dove $\alpha = \eta \delta < 1$. Per il teorema delle contrazioni esiste allora un unico punto fisso $\bar{y}$ dello spazio metrico completo W tale che $F(\bar{y}) = \bar{y}$, ovvero una funzione $\bar{y}(t) \in W$ tale che

$$\bar{y}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \bar{y}(\tau)) d\tau.$$

Dato che quest'ultima equazione è equivalente al problema di Cauchy, perveniamo alla tesi.

Il teorema di esistenza e unicità si può estendere senza difficoltà al caso di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine in forma normale,

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0. \end{cases}$$

In questo caso si può ripetere la dimostrazione precedente lavorando nello spazio delle funzioni vettoriali con derivate continue, definite in D , a valori in $\mathbb{R}^n$, con la metrica

$$d(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \max_{t \in D} \|\mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}_2(t)\|,$$

dove $\|\cdot\|$ indica l'usuale norma in $\mathbb{R}^n$. La funzione vettoriale $\mathbf{f}$ si suppone continua in $D \times \mathbb{R}^n$ e la condizione di Lipschitz si scrive nella forma

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_2)\| \leq \eta \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|, \quad \forall t \in D, \quad \forall \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in B,$$

dove $B = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0\| \leq b\}$.

OSSERVAZIONE. Si può dimostrare che la condizione di Lipschitz è soddisfatta se la funzione $f(t, y)$ ha derivata parziale rispetto a y continua. Ciò vale anche nel caso di un sistema di equazioni, nell'ipotesi cioè che la funzione $\mathbf{f}$ abbia derivate parziali rispetto a ciascuna delle componenti di $\mathbf{y}$, continue.

4.3 Equazioni differenziali lineari

Una equazione differenziale lineare di ordine n ha la forma

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = \phi(t).$$

Se $\phi(t)$ è identicamente nulla, l'equazione si dice *omogenea*.

Supponiamo che la funzione $a_0(t)$ non si annulli mai in un dominio $D \subset \mathbb{R}$ e dividiamo ambo i membri dell'equazione data per $a_0(t)$. Allora si ottiene l'equazione

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = f(t),$$

che è riducibile a forma normale, in cui cioè, è possibile esplicitare la derivata di ordine massimo. Come sappiamo questa equazione è equivalente ad un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine in forma normale. Se si assegnano gli n dati iniziali

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)},$$

nell'ipotesi di continuità delle funzioni $p_i(t)$, ($i = 1, \dots, n$) e della $f(t)$ in D , l'osservazione alla fine del paragrafo precedente implica che siano soddisfatte le ipotesi del teorema di esistenza e unicità.

Sia $C^{(n)}(D)$ lo spazio delle funzioni derivabili n volte in D con derivata n -esima continua. Consideriamo l'applicazione $L : C^{(n)}(D) \rightarrow C(D)$ definita da

$$L(y) = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y.$$

Per ogni coppia di funzioni $y_1(t)$ e $y_2(t)$ in $C^{(n)}(D)$ e per ogni scalare c si ha

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2), \quad L(cy_1) = cL(y_1).$$

L'applicazione risulta dunque lineare. L'equazione differenziale si può scrivere nella forma

$$L(y) = f.$$

Notiamo inoltre che se y_1 e y_2 sono due soluzioni particolari di questa equazione, la loro differenza $y_1 - y_2$ è soluzione dell'equazione lineare omogenea $L(y) = 0$, infatti, per la linearità di L ,

$$L(y_1 - y_2) = L(y_1) - L(y_2) = f - f = 0.$$

Se allora si conosce una soluzione particolare $\hat{y}$ dell'equazione non omogenea, ogni altra soluzione di questa equazione si otterrà aggiungendo a $\hat{y}$ una soluzione della omogenea $L(y) = 0$ che chiameremo equazione *omogenea associata*. In altri termini tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea $L(y) = f$ sono date da

$$y = \hat{y} + \bar{y} \quad \text{con} \quad \bar{y} \in \text{Ker}(L).$$

Studiamo allora l'equazione lineare omogenea $L(y) = 0$.

Teorema 4.2 *L'insieme delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea di ordine n*

$$L(y) = 0,$$

costituisce uno spazio vettoriale di dimensione n .

Dim. La tesi equivale a dire che $\dim[\text{Ker}(L)] = n$. Innanzitutto osserviamo che $\text{Ker}(L)$ è un sottospazio vettoriale di $C^{(n)}(D)$. Facciamo vedere quindi che esistono n elementi di $\text{Ker}(L)$ linearmente indipendenti e che tali elementi generano $\text{Ker}(L)$. Per raggiungere il primo obiettivo consideriamo i seguenti n problemi di Cauchy

$$\begin{aligned} 1) \quad & L(y) = 0, \quad \{y^{(k-1)}(t_0) = \delta_{1k}, \quad k = 1, \dots, n\} \\ 2) \quad & L(y) = 0, \quad \{y^{(k-1)}(t_0) = \delta_{2k}, \quad k = 1, \dots, n\} \\ & \vdots \\ n) \quad & L(y) = 0, \quad \{y^{(k-1)}(t_0) = \delta_{nk}, \quad k = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

dove con δ_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) si intende la delta di Kronecker. Ciascuno di questi problemi ammetterà una soluzione y_i , ($i = 1, \dots, n$), che sarà un elemento di $\text{Ker}(L)$ coincidente con una soluzione particolare di $L(y) = 0$. Costruiamo ora una combinazione lineare di queste n soluzioni,

$$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i.$$

Per la linearità di L , essa sarà ancora soluzione dell'equazione omogenea. Dalle condizioni iniziali sulle y_i , segue che la funzione y è l'elemento di $\text{Ker}(L)$ soddisfacente le condizioni

$$y^{(k-1)}(t_0) = c_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

La soluzione identicamente nulla è ancora un elemento di $\text{Ker}(L)$ e si ricava dalla combinazione precedente scegliendo $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Poiché la soluzione nulla è unica, la combinazione $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ si annulla se e solo se si annullano tutti i coefficienti c_i . In altri termini, gli

elementi $y_i \in \text{Ker}(L)$, ($i = 1, \dots, n$) sono linearmente indipendenti. Dimostriamo ora che essi generano $\text{Ker}(L)$. Sia z una qualunque soluzione particolare di $L(y) = 0$, soddisfacente le condizioni iniziali

$$z^{(k-1)}(t_0) = \eta_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Si verifica subito che essa è esprimibile come

$$z(t) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(t),$$

purchè si scelga $c_k = \eta_k$, ($k = 1, 2, \dots, n$). Infatti la combinazione $z = \sum_{k=1}^n \eta_k y_k$ è proprio l'elemento di $\text{Ker}(L)$ corrispondente alle condizioni iniziali imposte. Ne segue che ogni elemento di $\text{Ker}(L)$ è dato da una combinazione lineare delle y_i . In definitiva le n soluzioni y_i costituiscono una base di $\text{Ker}(L)$ e quindi $\dim[\text{Ker}(L)] = n$.

Chiameremo *sistema fondamentale* di soluzioni di una equazione lineare omogenea di ordine n , un insieme arbitrario di n soluzioni particolari linearmente indipendenti di questa equazione. L'integrale generale sarà dato dalle combinazioni lineari degli elementi di un sistema fondamentale.

Siano $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$, n funzioni $C^n(D)$. Consideriamo il determinante

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

detto *determinante di Wronsky* (o *wronskiano*) dell'insieme di funzioni $y_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Dimostriamo che se $\{y_k(t)\}$, ($t \in D$) è un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione differenziale omogenea di ordine n , $L(y) = 0$, il suo wronskiano è diverso da zero in tutto D . Supponiamo per assurdo che esista un $t_0 \in D$ tale che $W(t_0) = 0$ e consideriamo il sistema algebrico lineare nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n y_k(t_0) \alpha_k &= 0 \\ \sum_{k=1}^n y'_k(t_0) \alpha_k &= 0 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n y_k^{(n-1)}(t_0) \alpha_k &= 0. \end{aligned}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti di questo sistema è proprio $W(t_0)$ e di conseguenza il sistema ammette soluzioni non banali. Ne segue che la combinazione lineare

$$\sum_{k=1}^n y_k(t) \alpha_k,$$

di cui il sistema precedente rappresenta le condizioni iniziali, è una soluzione particolare di $L(y) = 0$ soddisfacente condizioni iniziali tutte nulle. Per l'unicità della soluzione, tale combinazione deve essere

la funzione identicamente nulla. In altri termini si ha

$$\sum_{k=1}^n y_k(t) \alpha_k = 0, \quad \forall t \in D,$$

con α_k non tutte nulle. Ma ciò contraddice l'indipendenza lineare delle funzioni $y_k(t)$. Per l'arbitrarietà di t_0 concludiamo che $W(t) \neq 0, \forall t \in D$.

• Esempio

Consideriamo l'equazione lineare omogenea

$$y''' - y' = 0.$$

Si tratta di una equazione del terzo ordine. Essa ammette come sistema fondamentale una qualunque terna di soluzioni particolari linearmente indipendenti. Notiamo che le seguenti funzioni

$$y_1 = 1, \quad y_2 = e^t, \quad y_3 = \cosh t, \quad y_4 = \sinh t,$$

sono tutte soluzioni particolari dell'equazione data. Di queste però solo tre sono linearmente indipendenti. Per esempio, le terne

$$\{y_1, y_2, y_3\} \quad \{y_1, y_2, y_4\} \quad \{y_1, y_3, y_4\},$$

sono sistemi fondamentali dell'equazione data. L'integrale generale si può scrivere, per esempio, come

$$y = c_1 + c_2 e^t + c_3 \sinh t.$$

Osserviamo che in questo caso

$$W(t) = \begin{vmatrix} 1 & e^t & \sinh t \\ 0 & e^t & \cosh t \\ 0 & e^t & \sinh t \end{vmatrix} = -1,$$

ovvero il wronskiano è diverso da zero per ogni t .

Ritorniamo al problema dell'equazione lineare non omogenea di ordine n ,

$$L(y) = f.$$

Riassumendo i risultati ottenuti fin qui, possiamo concludere che, data una sua soluzione particolare $\hat{y}$, l'equazione non omogenea ha la soluzione generale

$$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i + \hat{y}.$$

dove $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ è un sistema fondamentale dell'equazione omogenea associata.

4.4 Equazioni omogenee a coefficienti costanti

Consideriamo l'equazione lineare omogenea di ordine n , $L(y) = 0$ in cui, al posto delle funzioni $p_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) abbiamo n costanti a_i , ($i = 1, \dots, n$),

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0.$$

In questo caso, l'applicazione $L : C^{(n)} \rightarrow C$ si può scrivere sotto forma di composizione di applicazioni. Consideriamo per esempio il caso di una equazione omogenea del secondo ordine

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

e introduciamo l'applicazione di derivazione $D : V^{(n)} \rightarrow C$ definita da $D(y) = y'$. L'equazione precedente si può scrivere allora nella forma

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y = 0,$$

dove λ_1, λ_2 sono le radici dell'equazione $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$. Più in generale si ha

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2) \dots (D - \lambda_n)y,$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono le radici dell'equazione, detta *equazione caratteristica*,

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Le applicazioni $D - \lambda_i$ sono lineari ed inoltre le loro composizioni sono commutative. Infatti

$$\begin{aligned} (D - \lambda_i)(D - \lambda_j)y &= y'' - (\lambda_i + \lambda_j)y' + \lambda_i \lambda_j y, \\ (D - \lambda_j)(D - \lambda_i)y &= y'' - (\lambda_j + \lambda_i)y' + \lambda_j \lambda_i y. \end{aligned}$$

A questo punto osserviamo che il nucleo dell'applicazione L contiene tutti gli elementi dei nuclei delle applicazioni $D - \lambda_i$ e, di conseguenza, le soluzioni delle singole equazioni del primo ordine

$$(D - \lambda_1)y = 0, \quad (D - \lambda_2)y = 0, \quad \dots \quad (D - \lambda_n)y = 0,$$

sono soluzioni particolari dell'equazione $L(y) = 0$. Poiché la soluzione dell'equazione $(D - \lambda_i)y = 0$ è data da

$$c_i e^{\lambda_i t},$$

se l'equazione caratteristica ammette n radici distinte, le funzioni $e^{\lambda_i t}$, ($i = 1, \dots, n$) saranno linearmente indipendenti e formeranno quindi un sistema fondamentale per l'equazione omogenea. In altri termini l'equazione $L(y) = 0$ avrà l'integrale generale

$$y(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t}.$$

• Esempi

1) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

L'equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

da cui si ottiene $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Allora l'integrale generale sarà

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{2t}.$$

2) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y''' - y' = 0.$$

Si ha l'equazione caratteristica $\lambda^3 - \lambda = 0$ da cui si ricavano le radici $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$. L'integrale generale sarà

$$y = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^t.$$

L'equazione caratteristica può ammettere radici complesse. In tal caso, se ammette la radice $\lambda = \alpha + i\beta$, ammetterà anche la radice coniugata $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. Usando la formula di Eulero, le due soluzioni particolari corrispondenti, si possono porre nella forma

$$\begin{aligned} y_\lambda &= e^{\lambda t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t), \\ y_{\bar{\lambda}} &= e^{\bar{\lambda} t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t), \end{aligned}$$

Possiamo sempre sostituire queste soluzioni con una coppia di loro combinazioni lineari. Volendo ottenere soluzioni reali, scriveremo

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}(e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda} t}) = e^{\alpha t} \cos \beta t, \\ y_2 &= \frac{1}{2i}(e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda} t}) = e^{\alpha t} \sin \beta t, \end{aligned}$$

Quindi, ad ogni combinazione lineare $c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\bar{\lambda} t}$ presente nella soluzione di $L(y) = 0$ possiamo sostituire la combinazione $e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)$.

• Esempio

Risolvere l'equazione dell'oscillatore armonico smorzato,

$$s'' + 2hs' + \omega^2 s = 0, \quad (h > 0).$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 2h\lambda + \omega^2 = 0$ da cui si ottengono le radici

$$\lambda_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega^2}.$$

Se $h > \omega$, le due radici sono reali e, posto $\sqrt{h^2 - \omega^2} = \nu$, si ha l'integrale generale

$$s(t) = e^{-ht}(c_1 e^{\nu t} + c_2 e^{-\nu t}).$$

Se $h < \omega$, le due radici sono complesse e posto $\sqrt{\omega^2 - h^2} = \mu$ si ha

$$\lambda_1 = -h + i\mu, \quad \lambda_2 = -h - i\mu,$$

da cui segue l'integrale generale

$$s(t) = c_1 e^{-ht+i\mu t} + c_2 e^{-ht-i\mu t} = e^{-ht}(\alpha_1 \cos \mu t + \alpha_2 \sin \mu t).$$

Supponiamo ora che le radici dell'equazione caratteristica non siano tutte distinte ma ce ne sia una, chiamiamola genericamente λ , di molteplicità m . Allora le soluzioni particolari corrispondenti dell'equazione $L(y) = 0$ sono soluzioni dell'equazione

$$(D - \lambda)^m y = 0.$$

Osserviamo che vale la seguente identità, facilmente dimostrabile per induzione sull'indice m ,

$$(D - \lambda)^m t^p e^{\lambda t} = p(p-1)(p-2)\dots(p-m+1)t^{p-m}e^{\lambda t}.$$

In forza di questa identità, per ogni $p \leq m-1$, la funzione $t^p e^{\lambda t}$ è soluzione dell'equazione $(D - \lambda)^m y = 0$. Poiché le funzioni

$$e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda t},$$

sono linearmente indipendenti, la soluzione generale dell'equazione $L(y) = 0$ sarà data in questo caso da

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n-m} \hat{c}_i e^{\hat{\lambda}_i t} + \sum_{i=1}^m c_i t^{i-1} e^{\lambda t},$$

dove $\hat{\lambda}_i$ sono le rimanenti soluzioni distinte dell'equazione caratteristica.

• Esempi

1) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Dall'equazione caratteristica $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ ricaviamo la radice doppia $\lambda = 1$. Allora la soluzione è

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t.$$

2) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$$

Dall'equazione caratteristica $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$ otteniamo le due radici doppie $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Come sistema fondamentale avremo le seguenti funzioni

$$e^{it}, \quad e^{-it}, \quad t e^{it}, \quad t e^{-it}.$$

In termini di funzioni reali, si ottiene il sistema equivalente

$$\cos t, \quad \sin t, \quad t \cos t, \quad t \sin t,$$

da cui segue l'integrale generale

$$y(t) = (c_1 + c_2 t) \cos t + (c_3 + c_4 t) \sin t.$$

4.5 Equazioni non omogenee

Consideriamo ora una equazione lineare di ordine n non omogenea,

$$L(y) := y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = f(t).$$

Sappiamo che l'integrale generale di questa equazione è dato dalla somma di una sua soluzione particolare e della soluzione dell'omogenea associata. Dobbiamo quindi trovare delle procedure per determinare una soluzione particolare dell'equazione $L(y) = f$.

Osserviamo innanzitutto che se il termine non omogeneo è dato dalla somma di più funzioni, cioè se $f(t) = \sum_{q=1}^r f_q(t)$, vale il seguente *principio di sovrapposizione* delle soluzioni, ovvero,

Se $\hat{y}_q$ è una soluzione particolare dell'equazione $L(y) = f_q$ ($q = 1, \dots, r$), allora $\hat{y} = \sum_{q=1}^r \hat{y}_q$ è una soluzione particolare dell'equazione $L(y) = f = \sum_{q=1}^r f_q$.

Questo risultato segue dalla linearità dell'equazione in quanto si ha

$$L(\hat{y}) = L\left(\sum_{q=1}^r \hat{y}_q\right) = \sum_{q=1}^r L(\hat{y}_q) = \sum_{q=1}^r f_q = f.$$

Il principio di sovrapposizione consente di ricavare un integrale particolare di una equazione lineare non omogenea come somma di integrali particolari di equazioni contenenti singoli termini non omogenei in cui può essere decomposto il termine non omogeneo dell'equazione di partenza.

Detto questo, un metodo generale per la ricerca di un integrale particolare di una equazione lineare è quello della variazione delle costanti, già introdotto nel caso delle equazioni lineari del primo ordine. Ci limiteremo qui ad illustrare questo metodo nel caso di equazioni del secondo ordine in quanto, nella pratica, per equazioni di ordine superiore esso risulta poco maneggevole. Supponiamo di aver determinato la soluzione

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

dell'omogenea associata all'equazione non omogenea

$$y'' + p_1(t)y' + p_2(t)y = f(t),$$

dove y_1 e y_2 sono funzioni linearmente indipendenti definite in un dominio D . Cerchiamo una soluzione particolare di questa equazione nella forma

$$\hat{y}(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t).$$

Derivando otteniamo

$$\hat{y}' = c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_1 y_1' + c_2 y_2'.$$

Poiché abbiamo a disposizione le due funzioni $c_1(t)$ e $c_2(t)$ per soddisfare una sola equazione, possiamo imporre una condizione supplementare su tali funzioni. Si può porre ad esempio

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0,$$

e di conseguenza, una ulteriore derivazione della $\hat{y}$ fornisce

$$\hat{y}'' = c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 y_1'' + c_2 y_2''.$$

Sostituendo nell'equazione di partenza, si ottiene

$$c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 + c_1 y''_1 + c_2 y''_2 + p_1(c_1 y'_1 + c_2 y'_2) + p_2(c_1 y_1 + c_2 y_2) = f.$$

Poiché y_1 e y_2 sono soluzioni dell'omogenea associata, da quest'ultima si ricava,

$$c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = f.$$

Affinché $\hat{y}$ sia una soluzione, le derivate delle funzioni c_1 e c_2 devono dunque soddisfare il sistema

$$\begin{cases} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 = 0 \\ c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 = f. \end{cases}$$

Il determinante dei coefficienti di questo sistema è il wronskiano del sistema fondamentale di soluzioni. Esso, come sappiamo, è diverso da zero in tutto D , quindi il sistema ammette una sola soluzione data da

$$c'_1(t) = \frac{y_2(t)f(t)}{y_2(t)y'_1(t) - y_1(t)y'_2(t)}, \quad c'_2(t) = \frac{y_1(t)f(t)}{y_1(t)y'_2(t) - y_2(t)y'_1(t)}.$$

Integrando queste ultime e sostituendo nell'integrale generale della non omogenea, si ottiene

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_1(t) \int \frac{y_2 f}{y_2 y'_1 - y_1 y'_2} dt + y_2(t) \int \frac{y_1 f}{y_1 y'_2 - y_2 y'_1} dt.$$

• Esempio

Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y = \frac{1}{\cos t}.$$

L'equazione omogenea associata ammette la soluzione

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$

Facendo variare c_1 e c_2 , prendendo cioè $c_1 = c_1(t)$ e $c_2 = c_2(t)$, abbiamo

$$y' = c'_1 \cos t + c'_2 \sin t - c_1 \sin t + c_2 \cos t.$$

Imponendo la condizione

$$c'_1 \cos t + c'_2 \sin t = 0,$$

e sostituendo nell'equazione non omogenea abbiamo

$$-c'_1 \sin t + c'_2 \cos t = \frac{1}{\cos t},$$

da cui si ricava il sistema

$$\begin{cases} c'_1 \cos t + c'_2 \sin t = 0 \\ -c'_1 \sin t + c'_2 \cos t = \frac{1}{\cos t}, \end{cases}$$

che ammette la soluzione $c'_1 = -\tan t$, $c'_2 = 1$. Una integrazione fornisce $c_1 = \ln |\cos t| + \alpha_1$, $c_2 = t + \alpha_2$, e dunque una soluzione particolare della non omogenea è

$$\hat{y}(t) = \ln |\cos t| \cos t + t \sin t.$$

L'integrale generale sarà allora,

$$y(t) = (c_1 + \ln |\cos t|) \cos t + (c_2 + t) \sin t.$$

In alcuni casi, la forma del termine non omogeneo $f(t)$ e l'uso del principio di sovrapposizione delle soluzioni suggeriscono una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Consideriamo i casi più elementari.

1) Supponiamo che $f(t) = e^{at}P_n(t)$ dove $a \in \mathbb{R}$ e dove P_n è un polinomio di grado n in t . Allora se a non è radice dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata, una soluzione particolare $\hat{y}$ è data da

$$\hat{y}(t) = e^{at}Q_n(t),$$

dove Q_n è un polinomio di grado n in t a coefficienti indeterminati.

Se invece a è una radice dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata, si pone

$$\hat{y}(t) = t^p e^{at}Q_n(t),$$

dove p è la molteplicità della radice a .

2) Supponiamo che $f(t) = e^{at}[P_n(t)\cos bt + Q_m(t)\sin bt]$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e P_n e Q_m polinomi di grado n ed m in t . Allora se $a \pm ib$ non è una coppia di radici dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata, una soluzione particolare ha la forma

$$\hat{y}(t) = e^{at}[R_q(t)\cos bt + S_q(t)\sin bt],$$

dove R_q e S_q sono polinomi di grado $q = \max\{n, m\}$.

Se invece $a \pm ib$ è una coppia di soluzioni dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata, si pone

$$\hat{y}(t) = t^p e^{at}[R_q(t)\cos bt + S_q(t)\sin bt],$$

dove p è la molteplicità delle coppie di radici $a \pm ib$.

• Esempi

1) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y''' - y' = (2t + 1)e^{2t}.$$

L'equazione omogenea associata $y''' - y' = 0$ ammette l'integrale generale

$$\bar{y} = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea nella forma

$$\hat{y} = (At + B)e^{2t}.$$

Derivando otteniamo

$$\hat{y}' = (A + 2B + 2At)e^{2t}, \quad \hat{y}'' = (4A + 4B + 4At)e^{2t}, \quad \hat{y}''' = (12A + 8B + 8At)e^{2t}.$$

Sostituendo si trova

$$11A + 6B + 6At = 2t + 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{4}{9}.$$

L'integrale generale sarà dunque

$$y(t) = \bar{y}(t) + \hat{y}(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t} + \left(\frac{1}{3}t - \frac{4}{9}\right)e^{2t}.$$

2) Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - y = (t + 1)e^t.$$

L'integrale generale dell'omogenea associata $y'' - y = 0$ è dato da

$$\bar{y} = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Poiché l'esponenziale del termine non omogeneo compare nella soluzione della omogenea associata dobbiamo cercare una soluzione della non omogenea nella forma di un polinomio moltiplicato per te^t , ovvero

$$\hat{y} = (At + B)te^t.$$

Derivando otteniamo

$$\hat{y}' = [B + (2A + B)t + At^2]e^t, \quad \hat{y}'' = [2A + 2B + (4A + B)t + At^2]e^t.$$

Sostituendo ricaviamo

$$2A + 2B + 4At = t + 1, \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{4}.$$

L'integrale generale sarà allora

$$y(t) = \bar{y}(t) + \hat{y}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{4}(t + 1)te^t.$$

3) Determinare l'integrale generale della equazione

$$y'' + 4y = t \sin 2t.$$

L'omogenea associata $y'' + 4y = 0$ ha l'integrale

$$\bar{y} = c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t.$$

Anche in questo caso il termine non omogeneo compare nella soluzione della omogenea associata. Cercheremo allora la soluzione particolare della non omogenea nella forma

$$\hat{y} = (At + C)t \sin 2t + (Bt + D)t \cos 2t.$$

Derivando otteniamo

$$\begin{aligned} \hat{y}' &= [C + 2(A - D)t - 2Bt^2] \sin 2t + [D + 2(B + C)t + 2At^2] \cos 2t. \\ \hat{y}'' &= 4 \left[\frac{A}{2} - D - (C + 2B)t - At^2 \right] \sin 2t + 4 \left[\frac{B}{2} + C - (D - 2A)t - Bt^2 \right] \cos 2t. \end{aligned}$$

Sostituendo ricaviamo

$$\begin{aligned} 2(A - D - 4Bt) \sin 2t + 2(B + C + 4At) \cos 2t &= t \sin 2t \\ \Rightarrow \quad A = D = 0, \quad -B = C &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

4.6 Sistemi di equazioni differenziali lineari

Un sistema di equazioni differenziali del primo ordine $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ si dice lineare se $\mathbf{f}$ è una funzione lineare di $\mathbf{y}$ ovvero se

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b},$$

dove $\mathbf{A}$ è un operatore lineare in $\mathbb{R}^n$, in generale dipendente da $t \in D$, che agisce sulla funzione vettoriale $\mathbf{y} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ a componenti con derivate prime continue e dove $\mathbf{b}$ è una funzione vettoriale assegnata di $t \in D$. Il sistema si può scrivere anche nella forma

$$L(\mathbf{y}) = \mathbf{b},$$

dove L è l'applicazione definita da $D(\mathbf{y}) - \mathbf{A}\mathbf{y}$, essendo D l'applicazione di derivazione sulla funzione vettoriale $\mathbf{y}$. Per la linearità di quest'ultima, l'applicazione L risulta lineare. Ne segue che, come nel caso delle equazioni lineari, se $\bar{\mathbf{y}}$ rappresenta l'integrale del sistema omogeneo associato $L(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, e se $\hat{\mathbf{y}}$ è una soluzione particolare del sistema non omogeneo, l'integrale generale del sistema non omogeneo è dato da

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{y}}.$$

Teorema 4.3 *L'integrale generale del sistema omogeneo $L(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ è dato da tutte e sole le combinazioni lineari di n soluzioni particolari linearmente indipendenti $\mathbf{y}_{(k)}$ ($k = 1, \dots, n$).*

Dim. Consideriamo i seguenti n problemi di Cauchy

$$L(\mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{e}_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

dove $\mathbf{e}_k$ sono i versori della base canonica in $\mathbb{R}^n$, ovvero $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$. Chiamiamo $\mathbf{y}_{(k)}(t)$ le soluzioni di questi problemi per t appartenente ad un intorno di t_0 . Esse costituiscono n soluzioni particolari del sistema omogeneo. Si verifica subito che la combinazione lineare

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{y}_{(k)},$$

è soluzione del problema di Cauchy

$$L(\mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}(t_0) = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{e}_k.$$

Affinché tale soluzione sia quella identicamente nulla è sufficiente e necessario che tutti i coefficienti c_k siano nulli. Ne segue che le funzioni $\mathbf{y}_{(k)}$ sono linearmente indipendenti.

D'altra parte, una qualunque soluzione dell'equazione $L(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ avente condizioni iniziali $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^{(0)}$ si può scrivere nella forma

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{y}_{(k)}.$$

Infatti, basta scegliere $\alpha_k = y_k(t_0)$ affinché valga

$$\mathbf{y}(t_0) = \sum_{k=1}^n y_k(t_0) \mathbf{y}_{(k)}(t_0) = \sum_{k=1}^n y_k(t_0) \mathbf{e}_k = \mathbf{y}^{(0)}.$$

che corrisponde alla condizione iniziale data.

OSSERVAZIONE. Poiché una equazione differenziale lineare di ordine n in forma normale è sempre riconducibile a un sistema di n equazioni lineari del primo ordine in n funzioni incognite, il teorema 4.2 può essere ricavato dal teorema 4.3. Vale la pena esaminare in dettaglio questa implicazione. Se nell'equazione lineare omogenea

$$u^{(n)} + p_1(t)u^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t)u = 0,$$

si pone $u = y_1, u' = y_2, \dots, u^{(n-1)} = y_n$, si ottiene il sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 1 \\ -p_{n-1} & -p_{n-2} & -p_{n-3} & \dots & -p_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Dette $\mathbf{y}_{(k)}(t)$, $t \in D$, ($k = 1, 2, \dots, n$), n soluzioni linearmente indipendenti di tale sistema, soddisfacenti le condizioni iniziali $\mathbf{y}_{(k)}(t_0) = \mathbf{y}_{(k)}^0$, ad esse corrispondono le n soluzioni $u_k = y_{(k)1}$, ($k = 1, 2, \dots, n$) dell'equazione di partenza, soddisfacenti le condizioni

$$u_k(t_0) = y_{(k)1}^0, \quad u_k'(t_0) = y_{(k)2}^0, \quad \dots \quad u_k^{(n-1)}(t_0) = y_{(k)n}^0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Osserviamo che il wronskiano $W(t)$ delle u_k non è altro che il determinante della matrice che ha per colonne i vettori $\mathbf{y}_{(k)}(t)$. L'indipendenza lineare delle $\mathbf{y}_{(k)}$ comporta quindi che W sia diverso da zero in tutto D e di conseguenza le soluzioni u_k risultano linearmente indipendenti.

Infine, ogni soluzione u soddisfacente le condizioni iniziali

$$u^{(k-1)}(t_0) = \eta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

è la corrispondente dell'unica soluzione del sistema di equazioni differenziali nelle y_i , soddisfacente le condizioni iniziali

$$y_i(t_0) = \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Poiché quest'ultima è una combinazione lineare delle n soluzioni $\mathbf{y}_{(k)}$, la soluzione u sarà una combinazione lineare delle u_k .

Consideriamo ora il caso di un sistema di n equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$$

dove $\mathbf{A}$ è un operatore in $\mathbb{R}^n$ indipendente da t . Ovviamente, anche in questo caso la soluzione si trova aggiungendo all'integrale generale del sistema omogeneo associato una soluzione particolare di quello non omogeneo. Studiamo dunque in dettaglio l'equazione omogenea.

In forma matriciale il sistema di equazioni differenziali si scrive

$$Y' = AY,$$

dove Y è il vettore colonna delle componenti del vettore $\mathbf{y}(t)$ in una base data e dove A è la matrice corrispondente all'operatore $\mathbf{A}$.

Se la matrice A è diagonalizzabile, il sistema può essere trasformato in n equazioni differenziali del primo ordine nelle singole componenti $z_i(t)$ di una funzione incognita $\mathbf{z}(t)$, legate alle componenti y_i dalla trasformazione che diagonalizza A . Più precisamente supponiamo che A ammetta n autovalori

distinti λ_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), cui corrispondono gli n vettori linearmente indipendenti $X^{(i)}$. Costruita la matrice invertibile Q che ha per colonne gli autovettori $X^{(i)}$, operiamo la trasformazione che diagonalizza A ,

$$Q^{-1}AQ = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad Y = QZ,$$

dove Z è il vettore colonna formato dalle componenti del vettore $\mathbf{y}$ nella nuova base. Poiché Q è una matrice di costanti, si ha $Y' = QZ'$ e il sistema di partenza diviene

$$QZ' = AQZ \implies Z' = Q^{-1}AQZ = \Lambda Z.$$

Si ottiene così, esplicitamente

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= \lambda_1 z_1(t), \\ z_2'(t) &= \lambda_2 z_2(t), \\ &\vdots \\ z_n'(t) &= \lambda_n z_n(t). \end{aligned}$$

Le equazioni così ottenute si dicono *disaccoppiate* perché ciascuna può essere risolta indipendentemente dalle altre. Risolvendole si ha

$$z_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Da queste soluzioni si ricavano poi le $y_i(t)$ mediante la trasformazione $Y = QZ$, ovvero

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^n Q_{ij} c_j e^{\lambda_j t} = \sum_{j=1}^n X_i^{(j)} c_j e^{\lambda_j t}.$$

In altri termini le $y_i(t)$ sono combinazioni lineari delle funzioni $e^{\lambda_j t}$. Dato che gli autovalori λ_i non dipendono dalla base scelta e osservando che i vettori $X^{(j)} c_j$ altro non sono che le n -uple di componenti degli autovettori $\mathbf{k}^{(j)}$ di $\mathbf{A}$ nella base data, la soluzione del sistema di partenza si scrive come

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{k}^{(i)} e^{\lambda_i t}.$$

Le singole funzioni $\mathbf{k}^{(i)} e^{\lambda_i t}$ si dicono anche *autofunzioni* del sistema di equazioni differenziali $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$.

• Esempio

Risolvere il sistema di equazioni differenziali lineari omogenee

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

Si ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \implies \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda - 5.$$

Si ottiene così $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$. Gli autovettori corrispondenti sono

$$K^{(1)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad K^{(2)} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

L'integrale generale del sistema sarà

$$Y = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} \implies \begin{cases} y_1 = c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t} \\ y_2 = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{5t} \end{cases}.$$

Se il polinomio caratteristico ammette una radice complessa, esso ammetterà anche la sua coniugata e i corrispondenti autovettori saranno coniugati. Infatti, essendo A reale, se $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, ne segue $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}$. Posto $\lambda = a + ib$, le corrispondenti autofunzioni saranno

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}e^{(a+ib)t}, \quad \bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{x}}e^{(a-ib)t}.$$

queste ultime si possono sempre esprimere in termini reali, sostituendole con le combinazioni

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbf{y} + \bar{\mathbf{y}}) &= \Re(\mathbf{y}) = e^{at}(\mathbf{x}_a \cos bt - \mathbf{x}_b \sin bt), \\ \frac{1}{2i}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) &= \Im(\mathbf{y}) = e^{at}(\mathbf{x}_a \sin bt + \mathbf{x}_b \cos bt), \end{aligned}$$

dove si è posto $\mathbf{x} = \mathbf{x}_a + i\mathbf{x}_b$.

• Esempio

Determinare l'integrale generale del sistema di equazioni omogenee

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - 5y_2 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$$

Si ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3i, \quad \lambda_2 = -3i.$$

I corrispondenti autovettori sono

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 + 3i \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 - 3i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Si ottengono così le due soluzioni reali

$$\begin{aligned} Y_A &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cos 3t - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 3t \\ Y_B &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sin 3t + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 3t, \end{aligned}$$

Prendendo una loro combinazione lineare otteniamo l'integrale generale

$$\begin{aligned} y_1 &= (c_1 + 3c_2) \cos 3t - (3c_1 - c_2) \sin 3t \\ y_2 &= 2c_1 \cos 3t + 2c_2 \sin 3t. \end{aligned}$$

Il procedimento indicato per la soluzione dei sistemi omogenei non cambia se la matrice A ammette autovalori con molteplicità maggiore di 1, purchè sia sempre diagonalizzabile. Se, per esempio, l'autovalore λ ha molteplicità m e a tale autovalore corrispondono esattamente m autovettori $\hat{X}^{(j)}$, ($j = 1, 2, \dots, m$) linearmente indipendenti, si ricava

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^m \hat{X}_i^{(j)} \hat{c}_j e^{\lambda t} + \sum_{j=1}^{n-m} X_i^{(j)} c_j e^{\lambda_j t},$$

da cui

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=1}^m \hat{\mathbf{k}}^{(j)} + \sum_{j=1}^{n-m} \mathbf{k}^{(j)} e^{\lambda_j t},$$

dove $\mathbf{k}^{(j)}$ sono gli autovettori corrispondenti agli autovalori λ_j con molteplicità 1.

• Esempio

Determinare l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{aligned} y_1' &= 6y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ y_2' &= 2y_1 + 3y_2 - 4y_3 \\ y_3' &= 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 \end{aligned}$$

Si ha

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = 7 \text{ (2volte)}, \quad \lambda_2 = -2$$

Poiché la matrice A è simmetrica, essa ammette 3 autovettori linearmente indipendenti. In particolare si ha, per $\lambda = \lambda_1$,

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mentre, per $\lambda = \lambda_2$,

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La soluzione del sistema sarà allora

$$\mathbf{y} = \left[c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{7t} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

Supponiamo ora che la matrice A non ammetta n autovettori linearmente indipendenti e non sia quindi diagonalizzabile. Dall'algebra sappiamo che in questo caso è sempre possibile ridurre A alla forma canonica di Jordan mediante una opportuna trasformazione di base. Indicata con Q la matrice di trasformazione, costruita con n autovettori generalizzati di A , si ha

$$Q^{-1}AQ = J = \text{diag}(J_1, \dots, J_p), \quad Y = QZ,$$

dove J_i ($i = 1, 2, \dots, p$) sono blocchi di Jordan di ordine n_i e dove $\sum_{i=1}^p n_i = n$. Il sistema lineare $Y' = AY$ diventa

$$QZ' = AQZ \implies Z' = Q^{-1}AQZ = JZ.$$

Quest'ultimo sistema si spezza in p sottosistemi disaccoppiati

$$Z_i' = J_i Z_i, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

ciascuno nelle n_i -uple di funzioni incognite $\{z_{i1}(t), z_{i2}(t), \dots, z_{in_i}(t)\}$. Esplicitamente, fissato i si ha

$$\begin{aligned} z'_{i1}(t) &= \lambda_i z_{i1}(t) + z_{i2}(t), \\ z'_{i2}(t) &= \lambda_i z_{i2}(t) + z_{i3}(t), \\ &\vdots \\ z'_{in_i-1}(t) &= \lambda_i z_{in_i-1}(t) + z_{in_i}(t), \\ z'_{in_i}(t) &= \lambda_i z_{in_i}(t). \end{aligned}$$

Dall'ultima equazione ricaviamo

$$z_{in_i}(t) = c_{n_i} e^{\lambda_i t},$$

e sostituendo nella precedente otteniamo l'equazione lineare non omogenea

$$z'_{in_i-1}(t) = \lambda_i z_{in_i-1}(t) + c_{n_i} e^{\lambda_i t},$$

la cui soluzione è

$$z_{in_i-1}(t) = (c_{n_i-1} + c_{n_i} t) e^{\lambda_i t}.$$

Sostituendo ancora nell'equazione precedente e continuando così fino a risolvere la prima equazione, si ottiene

$$\begin{aligned} z_{in_i-2}(t) &= (c_{n_i-2} + c_{n_i-1} t + \frac{1}{2} c_{n_i} t^2) e^{\lambda_i t}, \\ &\vdots \\ z_{i1}(t) &= (c_1 + c_2 t + \frac{1}{2} c_3 t^2 + \dots + \frac{1}{(n_i-1)!} c_{n_i} t^{n_i-1}) e^{\lambda_i t}. \end{aligned}$$

In generale si può dunque scrivere la soluzione dell'intero sistema nella forma

$$z_{ij}(t) = e^{\lambda_i t} P_{n_i-j}(t), \quad j = 1, \dots, n_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

dove $P_{n_i-j}(t)$ è un polinomio in t di grado $n_i - j$. Osservando che $Z = (z_{11}, \dots, z_{1n_1}, z_{21}, \dots, z_{2n_2}, \dots, z_{p1}, \dots, z_{pn_p})^T$ si ottiene infine la soluzione del sistema di partenza dalla relazione $Y = QZ$.

• Esempio

Determinare l'integrale generale del sistema differenziale lineare omogeneo

$$\begin{aligned} y'_1 &= -y_1 + 2y_3, \\ y'_2 &= 2y_1 + y_2 - 2y_3, \\ y'_3 &= -2y_1 + 3y_3. \end{aligned}$$

Si ha $Y' = AY$ con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

da cui si ricava $\lambda_1 = 1$ (3 volte). All'unico autovalore corrispondono i due autovettori linearmente indipendenti

$$X^{(1)} = (1, 0, 1)^T, \quad X^{(2)} = (1, 1, 1)^T.$$

La matrice non è diagonalizzabile e quindi cerchiamo gli autovettori generalizzati di A relativi a λ_1 . Posto

$$(A - I)X \neq 0, \quad (A - I)^2 X = 0,$$

troviamo un primo autovettore generalizzato,

$$X = (0, 1, 1)^T,$$

da cui si ottiene il secondo autovettore generalizzato

$$\tilde{X} = (A - I)X = (2, -2, 2)^T.$$

Abbiamo così due autovettori generalizzati $X, \tilde{X}$ linearmente indipendenti e possiamo scegliere come terzo autovettore, $X^{(1)}$. Si ottiene così

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$J = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il sistema $Z' = JZ$ è dato esplicitamente da

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z_1(t) \\ z_2'(t) &= z_2(t) \\ z_3'(t) &= z_3(t) + z_2(t), \end{aligned}$$

da cui ricaviamo

$$z_1(t) = c_1 e^t, \quad z_2(t) = c_2 e^t, \quad z_3(t) = c_3 e^t + c_2 t e^t.$$

Ritornando alle funzioni incognite $y_i(t)$, abbiamo

$$Y = QZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^t \\ (c_3 + c_2 t) e^t \end{pmatrix},$$

ovvero,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (c_1 + 2c_3 + 2c_2 t) e^t \\ y_2(t) &= (c_2 - 2c_3 - 2c_2 t) e^t \\ y_3(t) &= (c_1 + c_2 + 2c_3 + 2c_2 t) e^t. \end{aligned}$$

Nel caso di un sistema lineare non omogeneo si può cercare una soluzione particolare facendo ricorso sempre al metodo della variazione delle costanti. Illustriamo il metodo in questo caso mediante un esempio.

- Esempio

Determinare l'integrale generale del sistema non omogeneo

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 + \frac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

Il sistema omogeneo associato ammette l'integrale generale

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ y_2 &= -c_1 \sin t + c_2 \cos t. \end{aligned}$$

Facendo variare le costanti abbiamo

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t \\ y_2 &= -c_1(t) \sin t + c_2(t) \cos t, \end{aligned}$$

e sostituendo nel sistema di partenza otteniamo

$$\begin{aligned} c_1' \cos t + c_2' \sin t &= 0 \\ -c_1' \sin t + c_2' \cos t &= \frac{1}{\cos t}. \end{aligned}$$

La soluzione di questo sistema è

$$c_1' = -\tan t, \quad c_2' = 1,$$

da cui si ricava

$$c_1 = \ln |\cos t| + \alpha_1, \quad c_2 = t + \alpha_2.$$

L'integrale generale del sistema non omogeneo risulta

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t + \cos t \ln |\cos t| + t \sin t \\ y_2 &= -\alpha_1 \sin t + \alpha_2 \cos t - \sin t \ln |\cos t| + t \cos t. \end{aligned}$$

4.7 Alcune applicazioni delle equazioni differenziali

Consideriamo qui alcuni esempi di sistemi fisici il cui studio conduce alla risoluzione di un problema di Cauchy.

4.7.1 Probabilità di collisione

Consideriamo uno strato materiale a facce piane di spessore L e area A . Sia n il numero di molecole del materiale per unità di volume e supponiamo di poter rappresentare ciascuna molecola come una sfera di raggio R . Lo strato viene bombardato con molecole-proiettile anch'esse di forma sferica e raggio r . Una molecola-proiettile urterà una molecola del bersaglio se si avvicinerà a quest'ultima ad una distanza minore di $R + r$. La sezione d'urto di collisione per una molecola sarà allora $\sigma = \pi(R + r)^2$. Detta $x \in [0, L]$ la coordinata trasversale allo strato lungo cui incidono le molecole-proiettile, il numero

di molecole presenti nell'elemento di strato compreso tra x_0 e $x_0 + dx$ sarà dato da $nAdx$, mentre la sezione d'urto relativa allo stesso elemento sarà $S = \sigma nAdx$. Se si divide tale sezione d'urto per l'area A si trova la probabilità P che, su N proiettili incidenti, un numero pari a $|dN|$ urti le molecole del suddetto elemento di strato. In altri termini si ha

$$\left| \frac{dN}{N} \right| = P = \frac{\sigma nAdx}{A} = \sigma n dx.$$

Se N_0 è il numero di molecole incidenti sulla superficie dello strato (cioè per $x = 0$), il numero di molecole $N(x)$ che riescono a giungere alla profondità x senza collidere soddisferà il seguente problema di Cauchy del primo ordine,

$$\begin{cases} \frac{dN(x)}{dx} = -n\sigma N(x), \\ N(0) = N_0. \end{cases}$$

dove il segno meno è dovuto al fatto che dN rappresenta la perdita di proiettili che attraversano lo strato senza collidere, ed è quindi una quantità negativa. Integrando l'equazione differenziale si ha

$$\ln N(x) = -n\sigma x \implies N(x) = k e^{-n\sigma x},$$

e imponendo la condizione iniziale, si ottiene

$$N(x) = N_0 e^{-n\sigma x}.$$

Il numero di molecole-proiettile che attraversa uno spessore x ($0 < x < L$) decresce quindi esponenzialmente con x . La quantità

$$l = \frac{1}{n\sigma}$$

ha le dimensioni di una lunghezza ed è una misura della distanza percorsa in media da un proiettile senza collidere. Per tale motivo essa viene chiamata *libero cammino medio* del processo di collisione. In particolare il numero di proiettili che emergono dallo strato senza aver subito collisioni sarà

$$N = N_0 e^{-L/l}.$$

Nei problemi che seguono le funzioni incognite saranno funzioni f del tempo ed indicheremo con $\dot{f}, \ddot{f}, \dots$, le derivate prima, seconda, etc., di f rispetto a t .

4.7.2 Moto di un punto soggetto a forza resistente

Sia $\mathbf{x}$ la posizione nello spazio di un punto materiale di massa m e sia $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ la sua velocità. Supponiamo che il punto sia soggetto ad una forza resistente $\mathbf{F}_R = -h\|\mathbf{v}\|\mathbf{v}$ dove $h \in \mathbb{R}^{++}$, e alla forza peso $m\mathbf{g}$. Assumiamo inoltre che all'istante iniziale $t = 0$ si abbia $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ e $\mathbf{v}(0) = \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$. Vogliamo determinare il moto del punto.

L'equazione del moto $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, si scrive

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -h\|\dot{\mathbf{x}}\|\dot{\mathbf{x}} + m\mathbf{g}.$$

Detto x_1, x_2, x_3 le componenti di $\mathbf{x}$ rispetto ad una terna cartesiana ortogonale di versori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ e prendendo $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3$, con g accelerazione di gravità, si ottiene il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -h\|\dot{\mathbf{x}}\|\dot{x}_1 \\ m\ddot{x}_2 = -h\|\dot{\mathbf{x}}\|\dot{x}_2 \\ m\ddot{x}_3 = -h\|\dot{\mathbf{x}}\|\dot{x}_3 - mg, \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $x_1(0) = x_1^0, x_2(0) = x_2^0, x_3(0) = x_3^0, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0$. Notiamo che le prime due equazioni ammettono certamente la soluzione $x_1(t) = x_1^0, x_2(t) = x_2^0$ essendo verificate le condizioni iniziali. Per l'unicità della soluzione, il punto materiale manterrà, durante il moto, sempre le stesse coordinate sul piano x_1, x_2 . Il moto avverrà dunque lungo l'asse x_3 , secondo l'equazione

$$m\ddot{x}_3 = -h|\dot{x}_3|\dot{x}_3 - mg.$$

Da questa equazione, facendo uso delle condizioni iniziali, si deduce che $\ddot{x}_3(0) = -g, \dot{x}_3(0) = 0$. Allora, se x_3 è continua, essa ha un massimo in $t = 0$ e quindi, in un intorno $I = (0, \delta)$ si avrà $\dot{x}_3 < 0$. Ne segue che in I l'equazione diventa

$$m\ddot{x}_3 = h\dot{x}_3^2 - mg.$$

Dividendo per m e ponendo $u = \dot{x}_3$, $\alpha = h/m$, si ottiene

$$\begin{cases} \dot{u} - \alpha u^2 = -g \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione di questo problema separando le variabili

$$-\int \frac{du}{g - \alpha u^2} = t,$$

da cui,

$$\sqrt{\alpha g} t = \tanh^{-1} \left(-\sqrt{\frac{\alpha}{g}} u \right) + c.$$

Imponendo la condizione iniziale $u(0) = 0$, si ha $c = 0$ e ricavando u ,

$$u(t) = \dot{x}_3(t) = -\sqrt{\frac{g}{\alpha}} \tanh(\sqrt{\alpha g} t).$$

Poiché da questa soluzione $\dot{x}_3$ risulta minore di zero per ogni t , la soluzione del problema può essere estesa per qualunque $t > 0$. Integrando ulteriormente e tenendo conto della condizione $x_3(0) = x_3^0$, abbiamo

$$x_3(t) = x_3^0 - \frac{1}{\alpha} \ln[\cosh(\sqrt{\alpha g} t)].$$

Osserviamo che il moto del punto è tale che per $t \rightarrow \infty$ si ha $\dot{x}_3 \rightarrow -\sqrt{\frac{g}{\alpha}}$, cioè, asintoticamente, il punto assume velocità costante pari a $\sqrt{\frac{mg}{h}}$.

4.7.3 Oscillatore armonico forzato

Supponiamo che un punto materiale di massa m possa scorrere lungo una guida orizzontale priva di attrito. Detta x l'ascissa del punto sulla guida, rispetto ad una origine prefissata O , applichiamo al punto una forza elastica $-kx$ che tende a richiamarlo verso O ed una forza esterna periodica $F(t) = F \cos(\gamma t + \beta)$. Determinare il moto del punto sapendo che $x(0) = x_0$ e che $\dot{x}(0) = v_0$.

L'equazione del moto è

$$m\ddot{x} = -kx + F \cos(\gamma t + \beta).$$

Dividendo per m e ponendo $k/m = \omega^2$, $F/m = f$, si ottiene il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = f \cos(\gamma t + \beta) \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0. \end{cases}$$

L'omogenea associata $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ ammette l'integrale generale

$$\bar{x}(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t.$$

Supposto $\gamma \neq \omega$, cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea nella forma

$$\hat{x}(t) = b \cos(\gamma t + \beta).$$

Sostituendo nell'equazione si ottiene

$$-b\gamma^2 \cos(\gamma t + \beta) + \omega^2 b \cos(\gamma t + \beta) = f \cos(\gamma t + \beta),$$

che vale identicamente se

$$b = \frac{f}{\omega^2 - \gamma^2}.$$

In tal caso otteniamo l'integrale generale nella forma

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{f}{\omega^2 - \gamma^2} \cos(\gamma t + \beta).$$

Derivando si ha anche

$$\dot{x}(t) = -\omega c_1 \sin \omega t + \omega c_2 \cos \omega t - \frac{f\gamma}{\omega^2 - \gamma^2} \sin(\gamma t + \beta).$$

Imponendo le condizioni iniziali su x e $\dot{x}$ si ha

$$\begin{aligned} x_0 &= c_1 + \frac{f}{\omega^2 - \gamma^2} \cos \beta, \\ v_0 &= \omega c_2 - \frac{f\gamma}{\omega^2 - \gamma^2} \sin \beta. \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$c_1 = x_0 - \frac{f}{\omega^2 - \gamma^2} \cos \beta, \quad c_2 = \frac{1}{\omega} \left(v_0 + \frac{f\gamma}{\omega^2 - \gamma^2} \sin \beta \right).$$

La soluzione del problema sarà dunque

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{f \cos \beta}{\omega^2 - \gamma^2} \right) \cos \omega t + \left(\frac{v_0}{\omega} + \frac{(f\gamma/\omega) \sin \beta}{\omega^2 - \gamma^2} \right) \sin \omega t + \frac{f \cos(\gamma t + \beta)}{\omega^2 - \gamma^2}.$$

Nel caso in cui $\gamma = \omega$ la soluzione particolare precedentemente trovata non vale più e si deve cercare un integrale particolare nella forma

$$\hat{x}(t) = at \sin(\omega t + \beta).$$

Sostituendo si ha

$$2a\omega \cos(\omega t + \beta) = f \cos(\omega t + \beta) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{f}{2\omega}.$$

L'integrale generale sarà allora

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{f}{2\omega} t \sin(\omega t + \beta).$$

Sfruttando le condizioni iniziali si ricava

$$x_0 = c_1, \quad v_0 = c_2\omega + \frac{f}{2\omega} \sin \beta,$$

da cui

$$c_1 = x_0, \quad c_2 = \frac{1}{\omega} \left(v_0 - \frac{f}{2\omega} \sin \beta \right).$$

La soluzione del problema sarà dunque

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \left(\frac{v_0}{\omega} - \frac{f \sin \beta}{2\omega^2} \right) \sin \omega t + \frac{f}{2\omega} t \sin(\omega t + \beta).$$

Osserviamo che, nel caso $\gamma = \omega$ la soluzione particolare $\hat{x}$ rappresenta una oscillazione di frequenza ω con ampiezza crescente in modo lineare e quindi illimitata per $t \rightarrow \infty$.

Nel caso in cui la differenza tra γ e ω sia "relativamente piccola", cioè $|\omega - \gamma| \ll \omega$, allora la soluzione $\hat{x}$ può essere approssimata in modo da descrivere il fenomeno dei *battimenti*. A questo scopo poniamo $\omega - \gamma = \nu$ dove $|\nu| \ll \omega$ e riscriviamo la soluzione del problema nella forma

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_1(t),$$

dove $x_1(t)$ è la parte di soluzione dipendente da γ , ovvero

$$x_1 = \left[\frac{f}{\omega^2 - \gamma^2} (-\cos \omega t \cos \beta) + \frac{f \gamma / \omega}{\omega^2 - \gamma^2} \sin \omega t \sin \beta + \frac{f \cos(\gamma t + \beta)}{\omega^2 - \gamma^2} \right].$$

Si ha

$$\begin{aligned} \omega^2 - \gamma^2 &= (\omega + \gamma)(\omega - \gamma) = (2\omega - \nu)\nu \simeq 2\omega\nu, \\ \frac{\gamma/\omega}{\omega^2 - \gamma^2} &= \frac{\omega - \nu}{\omega(2\omega - \nu)\nu} \simeq \frac{1}{2\omega\nu}. \end{aligned}$$

La funzione $x_1(t)$ può essere approssimata come

$$\begin{aligned} x_1(t) &\simeq -\frac{f}{2\omega\nu} [\cos(\omega t + \beta) - \cos(\omega t - \nu t + \beta)] = \\ &= -\frac{f}{2\omega\nu} \left[\cos(\omega t + \beta) 2 \sin^2 \frac{\nu}{2} t - \sin(\omega t + \beta) 2 \sin \frac{\nu}{2} t \cos \frac{\nu}{2} t \right] = \\ &= \frac{f}{\omega\nu} \sin \frac{\nu t}{2} \sin \left[\left(\omega - \frac{\nu}{2} \right) t + \beta \right]. \end{aligned}$$

Quest'ultima rappresenta una oscillazione di frequenza $\omega - \nu/2$ con ampiezza modulata dal fattore $\sin(\nu/2)t$, e quindi, con frequenza di modulazione $\nu/2 \ll \omega$. La soluzione $x_1(t)$ descrive i cosiddetti battimenti che si sovrappongono alla parte puramente armonica della soluzione.