

ESERCIZI SU EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE SUPERIORE

- E.Q. LINEARI DI ORDINE m OMogenee A COEFF. COSTANTI
- E.Q. LINEARI DI ORDINE m NON OMogenee (A COEFF. COSTANTI)

EQ. LINEARI DI ORDINE n OMogenee A COEFF. COSTANTI

CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE

$$\underbrace{y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0}_{L(y)}$$

SIANO $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ LE RADICI DELL' EQUAZIONE CARATTERISTICA

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

ALLORA, LE SOLUZIONI DELLE SEGUENTI EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE

$$(D - \lambda_1)y = 0, (D - \lambda_2)y = 0, \dots, (D - \lambda_n)y = 0 \quad \text{con } D(y) := y'$$

SONO SOLUZIONI PARTICOLARI DELL'EQUAZIONE $L(y) = 0$

EQ. LINEARI DI ORDINE n OMogenee A COEFF. COSTANTI

LA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE

$$(D - \lambda_i) y = 0$$

E' DATA DA

$$C_i e^{\lambda_i t}$$

EQ. LINEARI DI ORDINE n OMogenee A COEFF. COSTANTI

Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono RADICI DISTINTE, ALLORA

LE FUNZIONI $e^{\lambda_i t}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

E QUINDI L'INTEGRALE GENERALE DI $L(y)=0$ SARA'

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

EQ. LINEARI DI ORDINE n OMogenee A COEFF. COSTANTI

Se TRA LE RADICI COMPARE $\lambda = \alpha + i\beta$ con $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

ALLORA ANCHE $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ SARA' RADICE

SI AVRA' QUINDI

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t)$$

$$e^{\bar{\lambda} t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t)$$

EQ. LINEARI DI ORDINE n OMogenee A COEFF. COSTANTI

PER EVITARE CHE NELL' INTEGRALE GENERALE COMPAIANO
NUMERI COMPLESSI POSSO "RIMPIAZZARE" $e^{\lambda t}$ e $e^{\bar{\lambda} t}$ CON

$$e^{\alpha t} \cos \beta t$$

$$e^{\alpha t} \sin \beta t$$

$$\left(= \frac{1}{2} (e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda} t}) \right)$$

$$\left(= \frac{1}{2} (e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda} t}) \right)$$

EQ. LINEARI DI ORDINE m OMogenee A COEFF. COSTANTI

Se LE RADICI NON FOSSERO TUTTE DISTINTE ???

SUPPONIAMO ESISTA UNA RADICE λ DI MOLTEPLICITA' $m > 1$

ALLORA λ GENERERA' LE SEGUENTI m SOLUZIONI

PARTICOLARI LINEARMENTE INDIPENDENTI DI $L(y) = 0$

$$e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{m-1} e^{\lambda t}$$

EQ. LINEARI DI ORDINE m OMogenee A COEFF. COSTANTI

Se, ad esempio,

λ è l'unica radice di molteplicità $m > 1$, allora l'integrale generale di $L(y)=0$ sarà

$$y(t) = \sum_{i=1}^m c_i t^{i-1} e^{\lambda t} + \sum_{i=1}^{m-m} \hat{c}_i e^{\hat{\lambda}_i t}$$

Dove $\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_{m-m}$ sono le restanti radici dell'equazione caratteristica

ESERCIZI

DETERMINARE L'INTEGRALE GENERALE DELLE SEGUENTI
EQUAZIONI:

1. (PAG. 57) $y''' - y' = 0$

2. (PAG. 58) $y'' - y = 0$

3. (PAG. 58) $y'' + 4y = 0$

1.

$$\rightarrow y''' - y' = 0 \leftarrow$$

IL POLINOMIO CARATTERISTICO ASSOCIATO E'

$$\lambda^3 - \lambda = 0 \leftrightarrow \lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \leftrightarrow \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

ED HA RADICI $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$

SONO DISTINTE, ALLORA

$$y(t) = c_1 e^{0 \cdot t} + c_2 e^t + c_3 e^{-t} = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t}$$

OK

2.

$$\rightarrow y'' - y = 0 \leftarrow$$

IL POLINOMIO CARATTERISTICO ASSOCIATO È

$$\lambda^2 - 1 = 0 \iff (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

ED HA RADICI $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

SONO DISTINTE, ALLORA

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

ok

3.

$$\rightarrow y'' + 4y = 0 \leftarrow$$

IL POLINOMIO CARATTERISTICO ASSOCIATO È

$$\lambda^2 + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 = -4$$

ED HA RADICI $\lambda_1 = i2$, $\lambda_2 = -i2$

SONO DISTINTE, ALLORA

$$y(t) = c_1 e^{i2t} + c_2 e^{-i2t}$$

OPPURE, EVITANDO I NUMERI COMPLESSI

$$y(t) = c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t$$

E.Q. LINEARI DI ORDINE n NON OMogenee (A COEFF. COSTANTI)

CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE

$$\underbrace{y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y}_{L(y)} = f(t)$$

L'INTEGRALE GENERALE di $L(y) = f(t)$ è DATO

DALLA SOMMA DI :

- L'INTEGRALE GENERALE $\bar{y}(t)$ di $L(y) = 0$
- UNA SOLUZIONE PARTICOLARE $\hat{y}(t)$ di $L(y) = f(t)$

E.Q. LINEARI DI ORDINE n NON OMogenee (A COEFF. COSTANTI)

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DELLE SOLUZIONI

Se $f(t) = \sum_{q=1}^n f_q(t)$, ALLORA

$$\hat{y}(t) = \sum_{q=1}^n \hat{y}_q(t)$$

CON $\hat{y}_q$ SOLUZIONE PARTICOLARE DI $L(y) = f_q(t)$

EQ. LINEARI DI ORDINE n NON OMogenee (A COEFF. COSTANTI)

ANALOGAMENTE AL CASO DI EQ. LINEARI DI ORDINE 1,

$\hat{y}$ VIENE GENERALMENTE RITROVATO A PARTIRE DA $\bar{y}$

USANDO IL METODO DELLA VARIATIONE DELLA COSTANTE

(AVETE VISTO A LEZIONE IL CASO
DI UN'EQUAZIONE DI ORDINE $n=2$)

E.Q. LINEARI DI ORDINE m NON OMogenee (A COEFF. COSTANTI)

IN ALCUNI CASI

(IN CUI $f(t)$ HA UNA "FORMA" PARTICOLARE)

SI PUO' TROVARE IN MANIERA PIU' SEMPLICE

1) $f(t) = e^{at} P_m(t)$, $a \in \mathbb{R}$, P_m POLINOMIO DI GRADO m

2) $f(t) = e^{at} (P_m(t) \cos bt + Q_m(t) \sin bt)$,

$a, b \in \mathbb{R}$, P_m, Q_m POLINOMI DI GRADO RISPETTIVAMENTE m E m

N.B. [LA "m" CHE COMPARE IN $P_m(t)$ SIA IN 1) CHE IN 2) NON COINCIDE NECESSARIAMENTE CON L' ORDINE "m" DELL' EQUAZIONE DIFF.]

E.Q. LINEARI DI ORDINE m NON OMogenee (A COEFF. COSTANTI)

$$1) f(t) = e^{at} P_m(t), \quad a \in \mathbb{R}, \quad P_m \text{ POLINOMIO DI GRADO } m$$

CASO 1.A

Se a NON È RADICE DELL'E.Q. CARATTERISTICA DELL'OMogenea,

$$\hat{y}(t) = e^{at} Q_m(t)$$

CON Q_m POLINOMIO DI GRADO m

E.Q. LINEARI DI ORDINE n NON OMogenee (A COEFF. COSTANTI)

$$1) f(t) = e^{at} P_n(t), \quad a \in \mathbb{R}, \quad P_n \text{ POLINOMIO DI GRADO } n$$

CASO 1.B

Se a è RADICE DELL'E.Q. CARATTERISTICA DELL'OMogenea,

$$\hat{y}(t) = t^p e^{at} Q_n(t)$$

CON:

- Q_n POLINOMIO DI GRADO n
- p MOLTEPLICITA' DELLA RADICE a

IN TAL CASO, SI DICE CHE C'È "RISONANZA"

E.Q. LINEARI DI ORDINE m NON OMogenee (A COEFF. COSTANTI)

$$2) f(t) = e^{at} (P_n(t) \cos bt + Q_m(t) \sin bt),$$

$a, b \in \mathbb{R}$, P_n, Q_m POLINOMI DI GRADO RISPETTIVAMENTE n E m

CASO 2.A

Se $a \pm ib$ NON SONO RADICI DELL'E.Q. CARAT. DELL'OMogenea,

$$\hat{y}(t) = e^{at} (R_q(t) \cos bt + S_q(t) \sin bt)$$

CON R_q, S_q POLINOMI DI GRADO $q := \max\{n, m\}$

E.Q. LINEARI DI ORDINE m NON OMogenee (A COEFF. COSTANTI)

2) $f(t) = e^{at} (P_n(t) \cos bt + Q_m(t) \sin bt)$,
 $a, b \in \mathbb{R}$, P_n, Q_m POLINOMI DI GRADO RISPETTIVAMENTE n E m
CASO 2.B

Se $a \pm ib$ sono RADICI DELL'E.Q. CARAT. DELL'OMogenea,

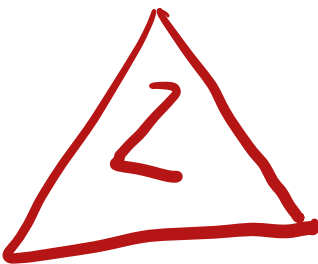
$$\hat{y}(t) = t^p e^{at} (R_q(t) \cos bt + S_q(t) \sin bt)$$

CON:

- R_q, S_q POLINOMI DI GRADO $q := \max\{n, m\}$
- p MOLTEPLICITA' DELLE RADICI $a \pm ib$

IN TAL CASO, SI DICE CHE C'E' "RISONANZA"

E.Q. LINEARI DI ORDINE m NON OMogenee (A COEFF. COSTANTI)

 ATTENTI !!!

I CASI 1) e 2) SI APPLICANO A MOLTE PIÙ
SITUAZIONI DI QUANTO UNO POSSA PENSARE!

E.g.

$$a=0 \text{ opp. } P_m(t)=0 \text{ opp. } Q_m(t)=0$$

ESERCIZI

DETERMINARE L'INTEGRALE GENERALE DELLE SEGUENTI
EQUAZIONI:

1. (PAG. 57) $y''' - y' = (2t+1)e^{2t}$

2. (PAG. 58) $y'' - y = (t+1)e^t$

3. (PAG. 58) $y'' + 4y = t \sin 2t$

1. $\rightarrow y''' - y' = (2t+1)e^{2t} \leftarrow$

L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQ. OMOGENEA ASSOCIATA E'

$$\bar{y}(t) = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t}$$

$f(t)$ e' del tipo 1) $f(t) = e^{at} P_n(t)$

con $a=2$ $P_n(t) = 2t+1$ e $n=1$

1. $\rightarrow y''' - y' = (2t+1)e^{2t} \leftarrow$

$\alpha=2$ **NON** e^{-} RADICE DEL POLINOMIO CARAT. DELL'EQ. OMOGENEA

QUINDI,

$$\hat{y}(t) = e^{2t} Q_1(t)$$

CON Q_1 POLINOMIO DI PRIMO GRADO

CIOC' $\hat{y}(t) = (At + B) e^{2t}$ con $A, B \in \mathbb{R}$

TROVIANO A, B !

1. $\rightarrow y''' - y' = (2t+1)e^{2t} \leftarrow$

$$\hat{y}(t) = (At + B)e^{2t} \Rightarrow$$

- $\hat{y}' = Ae^{2t} + (At+B)2e^{2t} = (A + 2B + 2At)e^{2t}$
- $\hat{y}'' = 2Ae^{2t} + (A + 2B + 2At)2e^{2t} = (4A + 4B + 4At)e^{2t}$
- $\hat{y}''' = 4Ae^{2t} + (4A + 4B + 4At)2e^{2t} = (12A + 8B + 8At)e^{2t}$

1. $\rightarrow y''' - y' = (2t+1)e^{2t} \leftarrow$

SOSTITUENDO,

$$(12A + 8B + 8At)e^{2t} - (A + 2B + 2At)e^{2t} = (2t+1)e^{2t}$$

$$\Leftrightarrow (11A + 6B + 6At)e^{2t} = (2t+1)e^{2t} \Leftrightarrow$$

$$11A + 6B + 6At = 2t + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 6A = 2 \\ 11A + 6B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ 11(\frac{1}{3}) + 6B = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{1}{6}(1 - \frac{11}{3}) = -\frac{4}{9} \end{cases}$$

1. $\rightarrow y''' - y' = (2t+1)e^{2t} \leftarrow$

QUINDI,

$$\hat{y}(t) = \left(\frac{1}{3}t - \frac{4}{9}\right)e^{2t}$$

E DI CONSEGUENZA L'INTEGRALE GENERALE E'

$$y(t) = \bar{y}(t) + \hat{y}(t) =$$

$$c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t} + \left(\frac{1}{3}t - \frac{4}{9}\right)e^{2t}$$

OK

2. $\rightarrow y'' - y = (t+1)e^t \leftarrow$

L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQ. OMOGENEA ASSOCIATA E'

$$\bar{y}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

$f(t)$ e' del tipo 1) $f(t) = e^{at} P_n(t)$

con $a=1$ $P_n(t) = t+1$ e $n=1$

2. $\rightarrow y'' - y = (t+1)e^t \leftarrow$

$\alpha = 1$ è RADICE DI MULT. 1 DEL POL. CARAT. DELL'EQ. OMogenea

QUINDI,

$$\hat{y}(t) = t^2 e^t Q_1(t)$$

con Q_1 polinomio di primo grado

cioè $\hat{y}(t) = (At + B)t e^t$ con $A, B \in \mathbb{R}$

TROVIANO $A, B!$

2. $\longrightarrow y'' - y = (t+1)e^t \longleftarrow$

$$\hat{y}(t) = (At + B)t e^t = (At^2 + Bt)e^t \Rightarrow$$

$$\bullet \hat{y}' = (2At + B)e^t + (At^2 + Bt)e^t = (B + (2A + B)t + At^2)e^t$$

$$\begin{aligned} \bullet \hat{y}'' &= (2A + B + 2At)e^t + (B + (2A + B)t + At^2)e^t = \\ &= (2A + 2B + (4A + B)t + At^2)e^t \end{aligned}$$

2. $\rightarrow y'' - y = (t+1)e^t \leftarrow$

SOSTITUENDO,

$$(2A + 2B + \cancel{(4A+B)}t + \cancel{At^2})e^t - (\cancel{At^2} + \cancel{Bt})e^t = (t+1)e^t$$

$$\Leftrightarrow (2A + 2B + 4At)e^t = (t+1)e^t \Leftrightarrow$$

$$2A + 2B + 4At = t + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4A = 1 \\ 2A + 2B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ \cancel{\frac{1}{2}} + 2B = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

2. $\longrightarrow y'' - y = (t+1)e^t \longleftarrow$

QUINDI,

$$\hat{y}(t) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}t \right) t e^t = \frac{1}{4}(t+1)t e^t$$

E DI CONSEGUENZA L'INTEGRALE GENERALE E'

$$y(t) = \bar{y}(t) + \hat{y}(t) =$$

$$c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{4}(t+1)t e^t$$

OK

3. $\rightarrow y'' + 4y = t \sin 2t \leftarrow$

L'INTEGRALE GENERALE DELL'EQ. OMOGENEA ASSOCIATA E'

$$\bar{y}(t) = c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t$$

$f(t)$ e' del tipo 2) $e^{at} (P_n(t) \cos bt + Q_m(t) \sin bt)$

con $a=0$, $b=2$, $P_n(t)=0$, $Q_m(t)=t$, $n=0$, $m=1$

3. $\rightarrow y'' + 4y = t \sin 2t \leftarrow$

$a \pm ib = \pm i2$ SONO RADICI DI MOLT. 1 DEL POL. CARAT. DELL'EQ. OMogenea

QUINDI,

$$\hat{y}(t) = t^2 \cancel{e^{at}} \left(R_1(t) \cos 2t + S_1(t) \sin 2t \right)$$

CON R_1, S_1 POLINOMI DI PRIMO GRADO

CIOE'

$$\hat{y}(t) = (At + C) t \sin 2t + (Bt + D) t \cos 2t$$

CON $A, B, C, D \in \mathbb{R}$

TROVIANO A, B, C, D !

3. $\rightarrow y'' + 4y = t \sin 2t \leftarrow$

$$\hat{y}(t) = (At^2 + Ct) \sin 2t + (Bt^2 + Dt) \cos 2t \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \cdot \hat{y}' &= (2At + C) \sin 2t + (At^2 + Ct) 2 \cos 2t + \\ &+ (2Bt + D) \cos 2t + (Bt^2 + Dt) (-2) \sin 2t = \\ &= (C + 2(A - D)t - 2Bt^2) \sin 2t + \\ &+ (D + 2(B + C)t + 2At^2) \cos 2t \end{aligned}$$

3. $\rightarrow y'' + 4y = t \sin 2t \leftarrow$

$$\hat{y}'(t) = (C + 2(A-D)t - 2Bt^2) \sin 2t + \Rightarrow$$

$$+ (D + 2(B+C)t + 2At^2) \cos 2t$$

$$\begin{aligned} \bullet y'' &= (2A - 2D - 4Bt) \sin 2t + (C + 2(A-D)t - 2Bt^2) 2 \cos 2t + \\ &+ (2B + 2C + 4At) \cos 2t + (D + 2(B+C)t + 2At^2) (-2) \sin 2t = \\ &= (2A - 4D - 4(C + 2B)t - 4At^2) \sin 2t + \\ &+ (2B + 4C - 4(D - 2A)t - 4Bt^2) \cos 2t \end{aligned}$$

3. $\rightarrow y'' + 4y = t \sin 2t \leftarrow$

SOSTITUENDO,

$$\begin{aligned} & (2A - 4D - 4(\cancel{C} + 2B)t - 4\cancel{A}t^2) \sin 2t + \\ & + (2B + 4C - 4(\cancel{D} - 2A)t - 4\cancel{B}t^2) \cos 2t + \\ & + 4 \left((\cancel{A}t^2 + \cancel{C}t) \sin 2t + (\cancel{B}t^2 + \cancel{D}t) \cos 2t \right) = t \sin 2t \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (2A - 4D - 8Bt) \sin 2t + (2B + 4C + 8At) \cos 2t = t \sin 2t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2A - 4D = 0 \\ -8B = 1 \\ 2B + 4C = 0 \\ 8A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ B = -\frac{1}{8} \\ C = -\frac{1}{2}B = \frac{1}{16} \\ A = 0 \end{cases}$$

3. $\longrightarrow y'' + 4y = t \sin 2t \longleftarrow$

QUINDI,

$$\hat{y}(t) = \frac{1}{16} t \sin 2t - \frac{1}{8} t^2 \cos 2t$$

E DI CONSEGUENZA L'INTEGRALE GENERALE E'

$$y(t) = \bar{y}(t) + \hat{y}(t) =$$

$$c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t + \frac{1}{16} t \sin 2t - \frac{1}{8} t^2 \cos 2t$$

OK

ESERCIZIO

DETERMINARE L'INTEGRALE GENERALE DI

$$y'' + 2Ky' + y = 0$$

PER $K=1$, RISOLVERE IL PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y'' + 2Ky' + y = \cos t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow y'' + 2Ky' + y = \cos t \leftarrow$$

TROVO L'INTEGRALE GENERALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA

$$y'' + 2Ky' + y = 0$$

L'EQUAZIONE CARATTERISTICA ASSOCIATA E'

$$\lambda^2 + 2K\lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -K \pm \sqrt{K^2 - 1}$$

$$\rightarrow y'' + 2Ky' + y = \cos t \leftarrow$$

SE $K^2 - 1 > 0$, cioè se $K < -1 \vee K > 1 \Rightarrow$ L'EQUAZIONE
CARATTERISTICA AMMETTE 2 SOLUZIONI REALI DISTINTE

$$\lambda_1 = -K - \sqrt{K^2 - 1}$$

$$\lambda_2 = -K + \sqrt{K^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \bar{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow y'' + 2Ky' + y = \cos t \leftarrow$$

SE $K^2 - 1 = 0$, CIÒÈ SE $K = \pm 1 \Rightarrow$ L'EQUAZIONE CARATTERISTICA

AMMETTE 1 SOLUZIONE REALE DI MOLTEPLICITÀ 2

$$\lambda = -K \pm \sqrt{K^2 - 1} = -K \quad m = 1$$

$$\Rightarrow \bar{y}(t) = c_1 e^{-Kt} + c_2 t e^{-Kt} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow y'' + 2Ky' + y = \cos t \leftarrow$$

SE $K^2 - 1 < 0$, cioè se $-1 < K < 1 \Rightarrow$ L'EQUAZIONE
CARATTERISTICA AMMETTE 2 SOLUZIONI COMPLESSE DISTINTE

$$\lambda_1 = \underbrace{-K}_{\alpha} - \underbrace{\sqrt{1-K^2}}_{\beta} i \quad \lambda_2 = -K + \sqrt{1-K^2} i$$

$$\Rightarrow \bar{y}(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

con $\alpha = -K \quad \beta = \sqrt{1-K^2}$

OK oroscopia

$$\rightarrow y'' + 2Ky' + y = \cos t \leftarrow$$

PER $K=1$,

$\lambda = -1$ con molteplicità 2

$$\bar{y}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

TROVIAMO UNA SOLUZIONE PARTICOLARE $\hat{y}(t)$ dell'equazione

NON omogenea $y'' + 2Ky' + y = \cos t$

$\hat{y}(t)$ è della forma PARTICOLARE

$$e^{at} (P_m(t) \cos bt + Q_m(t) \sin bt)$$

con $a=0$, $b=1$, $P_m(t)=1$, $Q_m(t)=0$, $m=n=0$

$$\rightarrow y'' + 2Ky' + y = \cos t \leftarrow$$

$0 \pm i1$ **NON** SONO RADICI DELL'EQUAZIONE CARATTERISTICA
ASSOCIATA ALL'OMOGENEA

$$\Rightarrow \hat{y}(t) = R \cos t + S \sin t \quad \text{con } R, S \in \mathbb{R}$$

↑
CASO 2.A

TROVIAMO R, S t.c. $\hat{y}$ SIA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE

$$\rightarrow y'' + 2ky' + y = \cos t \leftarrow$$

$$\hat{y}(t) = R \cos t + S \sin t$$

$$\bullet \hat{y}' = -R \sin t + S \cos t$$

$$\bullet \hat{y}'' = -R \cos t - S \sin t$$

SOSTITUENDO NELL'EQUAZIONE,

$$\begin{aligned} & -\cancel{R \cos t} - \cancel{S \sin t} + 2(-R \sin t + S \cos t) + \\ & + \cancel{R \cos t} + \cancel{S \sin t} = \cos t \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow y'' + 2K y' + y = \cos t \leftarrow$$

$$\Rightarrow -2R \sin t + 2S \cos t = \cos t$$

$$\Rightarrow R = 0 \quad S = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{y}(t) = \frac{1}{2} \sin t$$

e quindi,

$$y(t) = \bar{y}(t) + \hat{y}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + \frac{1}{2} \sin t$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow y'' + 2ky' + y = \cos t \leftarrow$$

IMPONIAMO IL PASSAGGIO PER LA CONDIZIONE INIZIALE

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + \frac{1}{2} \sin t$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 e^0 + \cancel{c_2 \cdot 0 \cdot e^0} + \cancel{\frac{1}{2} \sin 0} = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\Rightarrow y(t) = c_2 t e^{-t} + \frac{1}{2} \sin t$$

$$y'(t) = c_2 e^{-t} - c_2 t e^{-t} + \frac{1}{2} \cos t$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow c_2 e^0 - \cancel{c_2 \cdot 0 \cdot e^0} + \frac{1}{2} \cos 0 = 0$$

$$\Rightarrow c_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow y'' + 2ky' + y = \cos t \leftarrow$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} \left(\sin t - t e^{-t} \right)$$

OK