ESERCIZI

DETERMINARE E CLASSIFICARE I PUNTI STAZIONARI DELLE SEGUENTI FUNZIONI

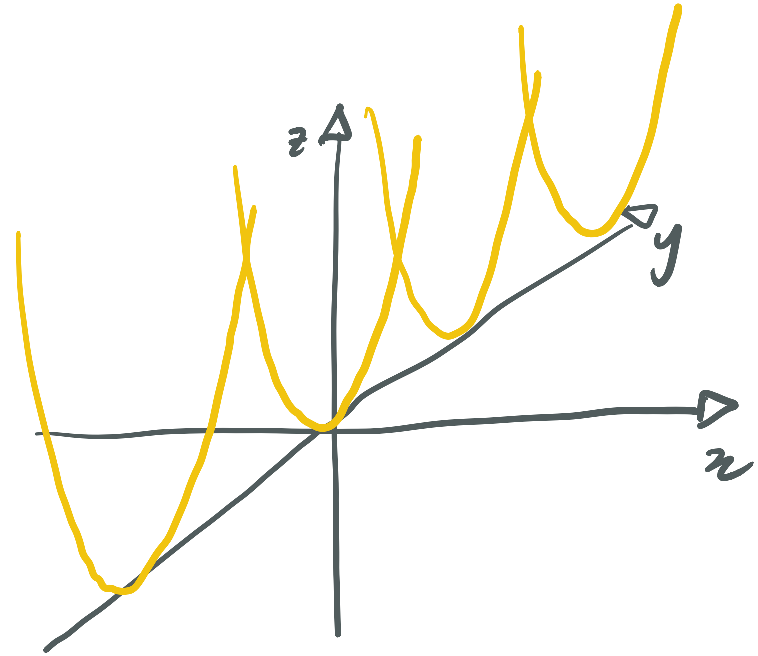
1. $f(x,y) = x^2$

2. $f(x,y) = x^3$

3. $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + (e^x - y)^4$

1. $\longrightarrow f(x,y) = x^2 \longleftarrow$

DETERMINO I PUNTI STAZIONARI



$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

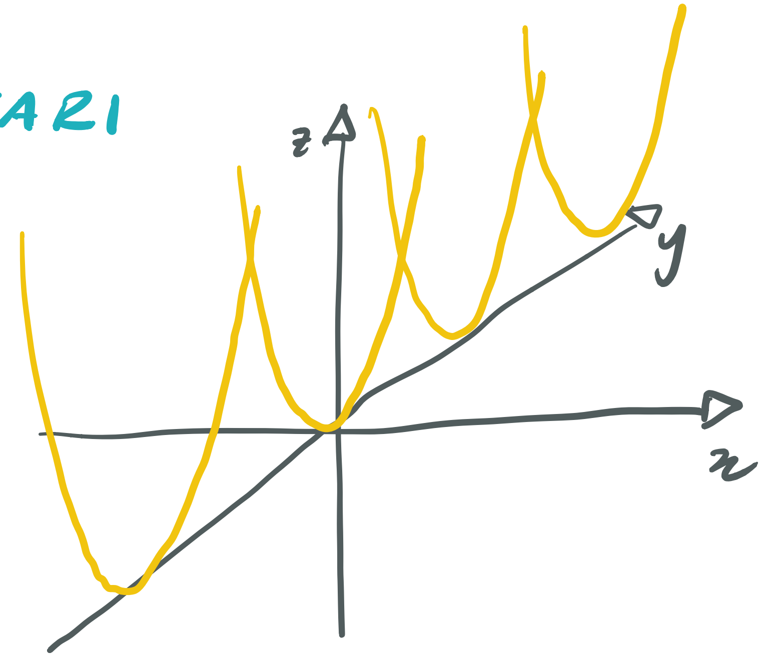
I PUNTI STAZIONARI DI f SONO

$$\{(0,y),\ \text{con } y \in \mathbb{R}\}$$

1. $f(x,y) = x^2$

CLASSIFICO I PUNTI STAZIONARI

$$H(0,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



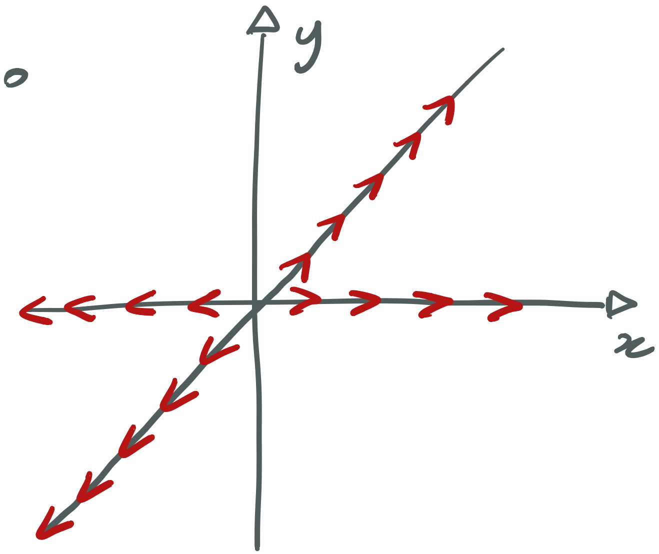
DETERMINANTE È NULLO

(INDIPENDENTEMENTE DAL PUNTO $(0,y)$ SCELTO)

CONCENTRIAMOCI SU $\underline{x}_0 = (0,0)$

(IL RAGIONAMENTO IN QUESTO CASO SARÀ ANALOGO ANCHE PER TUTTI GLI ALTRI PUNTI)

1. $\longrightarrow f(x,y) = x^2 \longleftarrow$



- SE MI RESTRINGO ALLA RETTA $r: y=0$

$\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ È MINIMO REL. PER $f|_r$

- SE MI RESTRINGO ALLA RETTA $r: x=0$

$\Rightarrow$ $f|_r$ È LA FUNZIONE COSTANTE 0

- SE MI RESTRINGO ALLA RETTA $r: y=x$

$\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ È MINIMO REL. PER $f|_r$

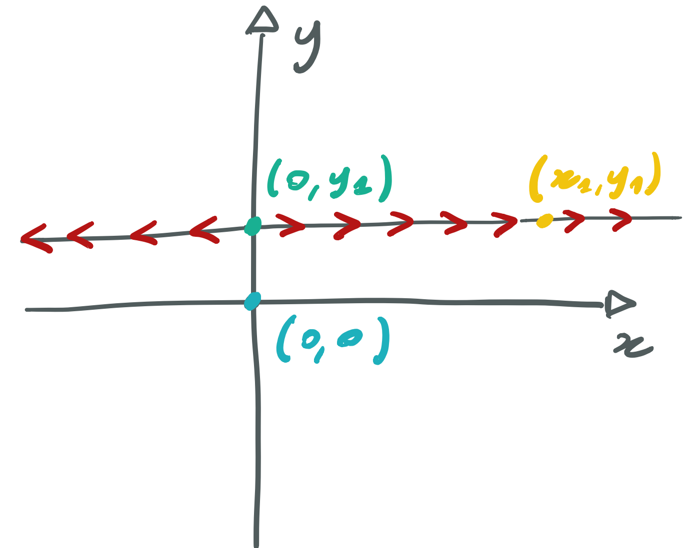
$\Rightarrow$ SOSPETTO CHE $\underline{x}_0 = (0,0)$ SIA UN MINIMO REL. PER f

PROVIAMOLO!!!

1. $\longrightarrow f(x,y) = x^2 \longleftarrow$

SIA $(x_1, y_2) \in B_\delta(0,0)$,

DEVO PROVARE CHE $f(0,0) \leq f(x_1, y_2)$



BASTA NOTARE CHE

$$f(0,0) \leq f(0, y_2) \leq f(x_1, y_2)$$

$f(0,0) = 0 = f(0, y_1)$

$f|_{y=y_2}$ HA UN MINIMO IN $(0, y_1)$

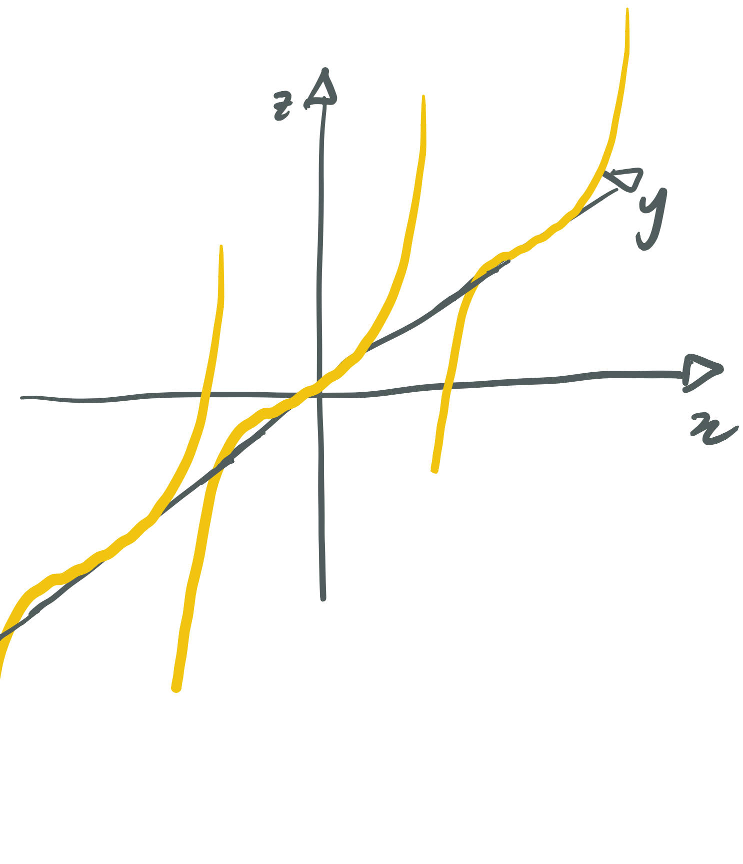
$\Rightarrow$ $(0,0)$ È MINIMO RELATIVO PER f

OK

2. $\longrightarrow f(x,y) = x^3 \longleftarrow$

DETERMINO I PUNTI STAZIONARI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

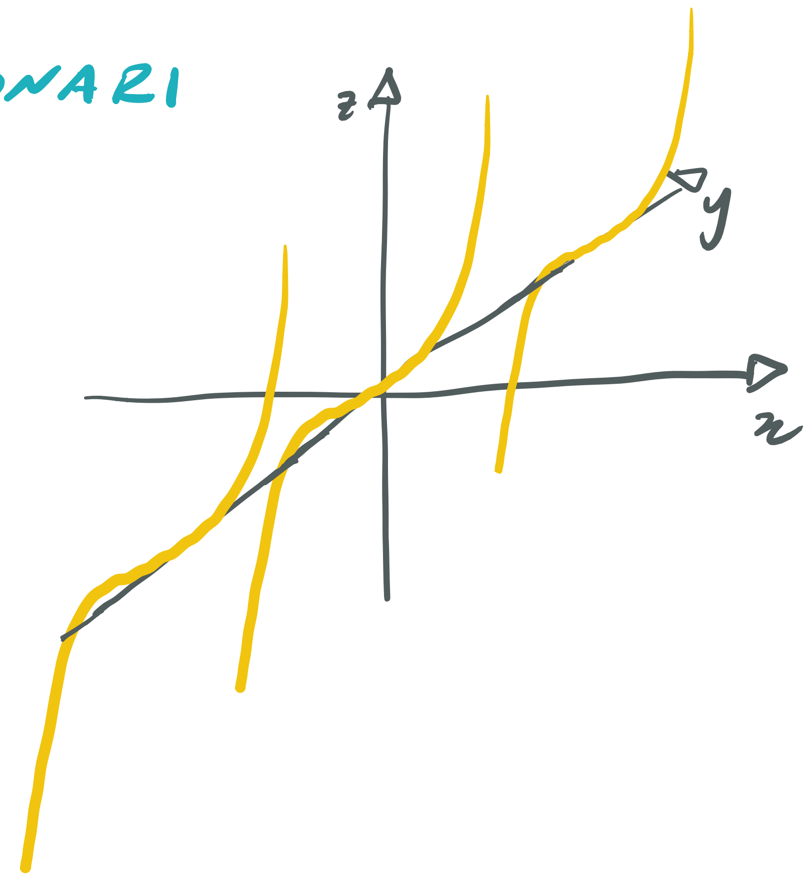


I PUNTI STAZIONARI DI f SONO

$$\{(0,y),\ \text{con } y \in \mathbb{R}\}$$

2. $f(x,y) = x^3$

CLASSIFICO I PUNTI STAZIONARI



$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DETERMINANTE È NULLO (INDIPENDENTEMENTE DAL PUNTO $\underline{x}_0 = (0,y)$ SCELTO)

(VERIFICATE PER ESERCIZIO CHE) $\underline{x}_0$ NON È UN PUNTO MINIMO RELATIVO O DI MASSIMO RELATIVO O DI SELLA PER f

OK

3. $\longrightarrow f(x,y) = x^4 - 2x^2 + (e^x - y)^4 \longleftarrow$

DETERMINO I PUNTI STAZIONARI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4e^x(e^x - y)^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -4(e^x - y)^3$$

$$\begin{cases} \cancel{4}\left(x^3 - x + e^x(e^x - y)^3\right) = 0 \\ \cancel{4}(e^x - y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 - x = 0 \iff \begin{matrix} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{matrix} \\ e^x = y \end{cases}$$

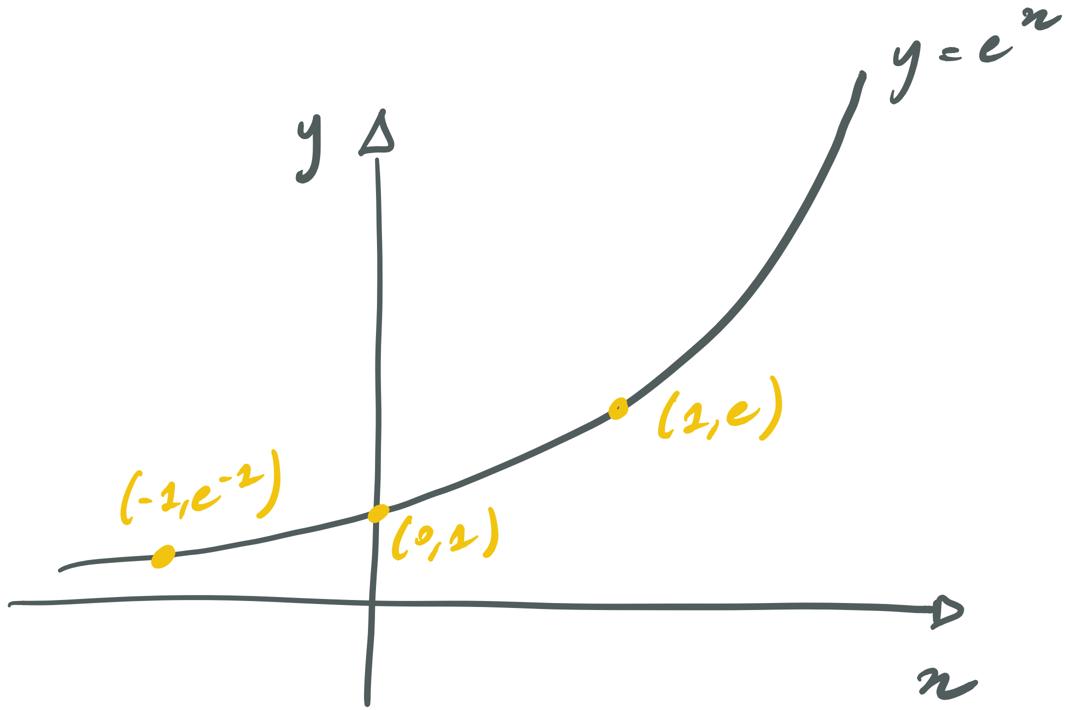
$\iff f$ HA TRE PUNTI STAZIONARI : $(0,1), \left(-1, \frac{1}{e}\right), (1, e)$

3. $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + (e^x - y)^4$

CLASSIFICO I PUNTI STAZIONARI

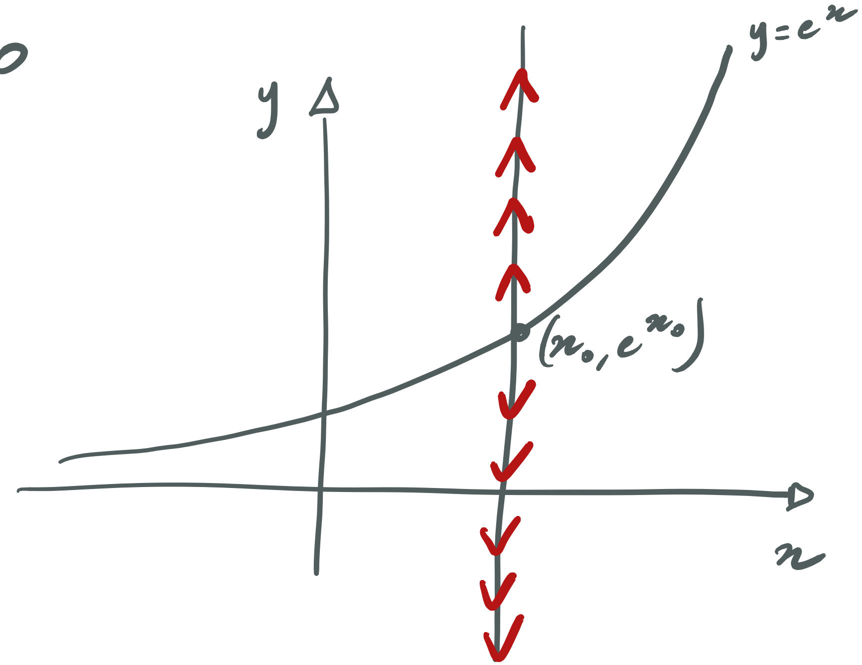
L'HESSIANO IN QUESTI TRE PUNTI HA DETERMINANTE NULLO

(VERIFICATELO PER ESERCIZIO)



3. $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + (e^x - y)^4$

SCELTO UN QUALSIASI PUNTO x_0 DEL TIPO (x_0, e^{x_0})



E RESTRINGENDOMI A

$r: \quad x = x_0$

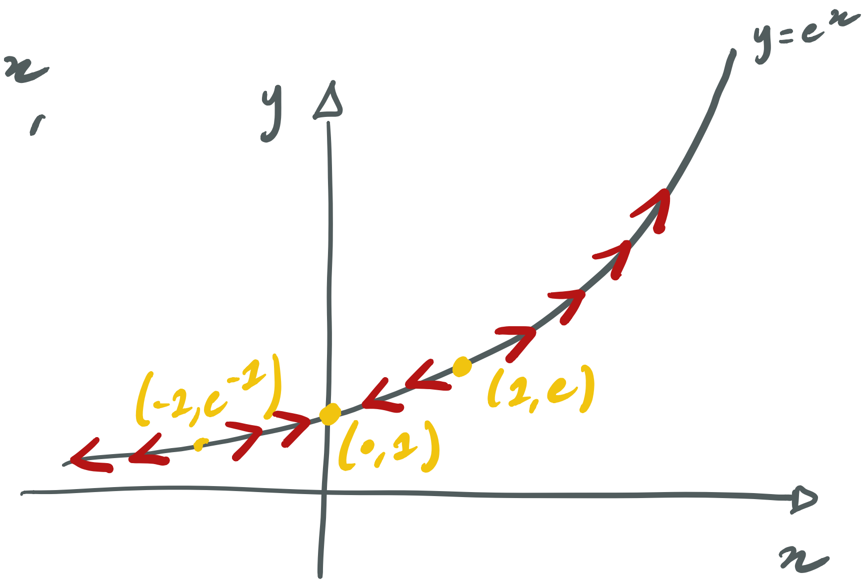
x_0 è PUNTO DI MINIMO REL. PER $f|_r$

INFATTI

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) > 0 \quad \text{PER} \quad y > e^x \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) < 0 \quad \text{PER} \quad y < e^x$$

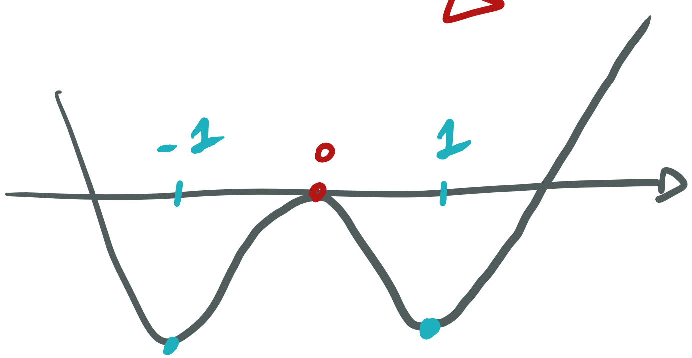
3. $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + (e^x - y)^4$

RESTRINGENDOMI A γ: $y = e^x$,



$f|_\gamma(x,y) = x^4 - 2x^2$

IL CUI GRAFICO È

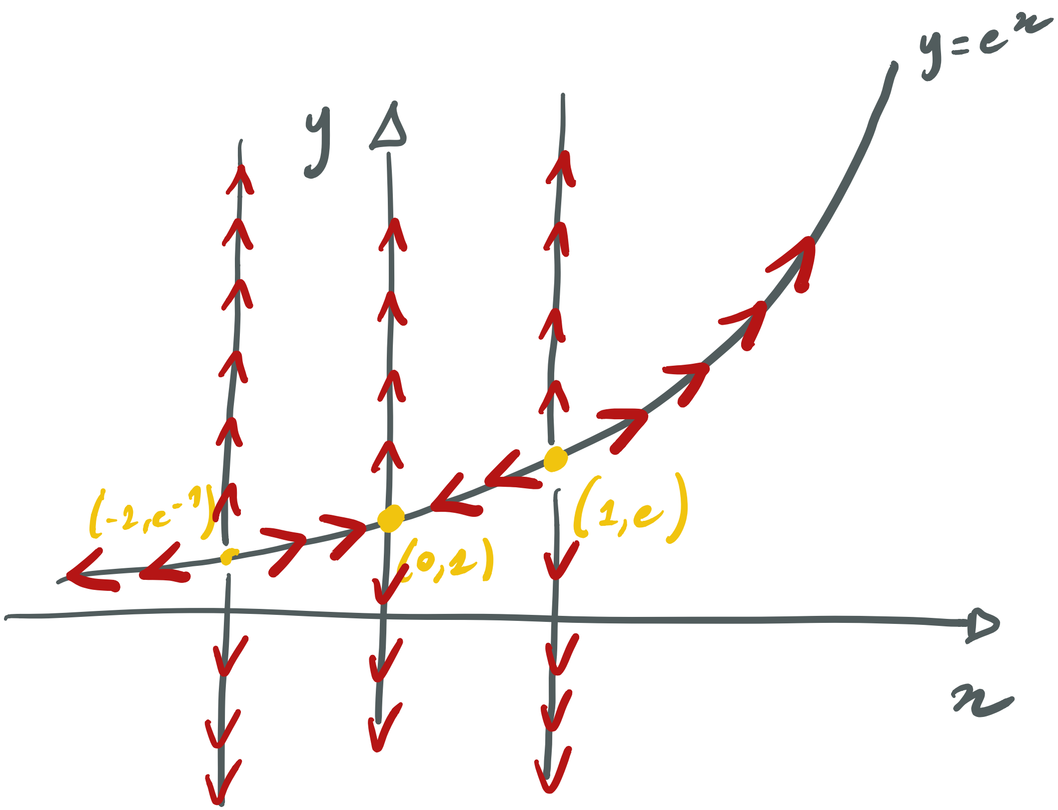


$\Rightarrow$ $f|_\gamma$ HA MINIMI RELATIVI IN ± 1

E MASSIMO RELATIVO IN 0

3. $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + (e^x - y)^4$

METTENDO INSIEME LE INFORMAZIONI FIN QUI OTTENUTE



$\Rightarrow$

$(0,1)$ è PUNTO DI SELLA PER f

$(-1, e^{-1})$, $(1, e)$ SONO CANDIDATI MINIMI RELATIVI PER f

3. $\longrightarrow$ $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + (e^x - y)^4$ $\longleftarrow$

PROVIAMO CHE $(1,e)$ È MIN. RELATIVO PER f

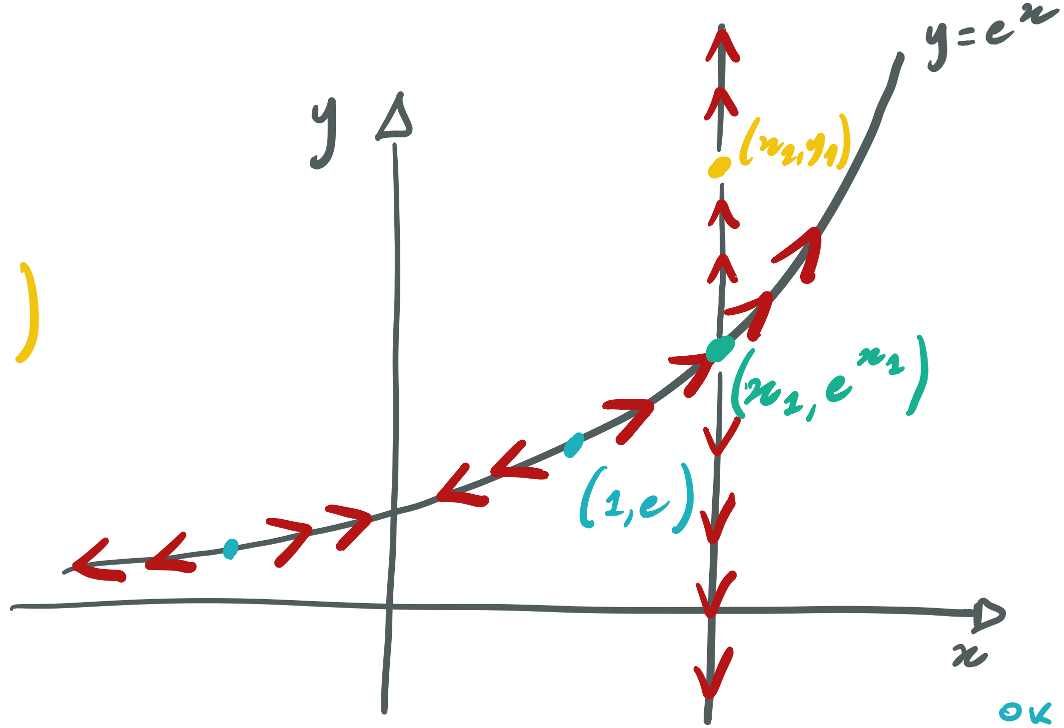
(CASO $(-1, e^{-1})$ PER ESERCIZIO)

SIA $(x_1, y_1) \in B_\delta(1,e)$, DEVO PROVARE CHE $f(1,e) \leq f(x_1, y_1)$

BASTA NOTARE CHE

$$f(1,e) \leq f(x_1, e^{x_1}) \leq f(x_1, y_1)$$

VEDI FRECCE RIPORTATE SUL GRAFICO



OK

ESERCIZI

DETERMINARE E CLASSIFICARE I PUNTI STAZIONARI DELLE SEGUENTI FUNZIONI

1. $f(x,y) = x^2y + x^2 - 2y$

2. $f(x,y) = (x^2+y^2)\,e^{-y}$

3. $f(x,y) = x^3 + x^2y - y^2 - 4y$

4. $f(x,y,z) = x^3 - 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + xz - yz + 3z$

1. $\rightarrow f(x,y) = x^2y + x^2 - 2y \leftarrow$

DETERMINO I PUNTI STAZIONARI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2$$

N.B. $x=0$
NON ACCETTABILE

$$\begin{cases} 2xy + 2x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(y+1) = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} y = -1 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

$\underline{x}_1 = (-\sqrt{2}, -1)$ e $\underline{x}_2 = (\sqrt{2}, -1)$ SONO I PUNTI STAZIONARI DI f

1. $\rightarrow f(x,y) = x^2 y + x^2 - 2y \leftarrow$

CLASSIFICO I PUNTI STAZIONARI

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2y+2 & 2x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

$$H(\underline{x}_1) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H(\underline{x}_1) < 0 \Rightarrow \underline{x}_1$$ PUNTO DI SELLA

$$H(\underline{x}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H(\underline{x}_2) < 0 \Rightarrow \underline{x}_2$$ PUNTO DI SELLA

ok

2. $\rightarrow f(x,y) = (x^2+y^2)\,e^{-y} \leftarrow$

DETERMINO I PUNTI STAZIONARI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\,e^{-y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\,e^{-y} - (x^2+y^2)\,e^{-y} =$$

$$= (2y - x^2 - y^2)\,e^{-y}$$

$$\begin{cases} 2x\,e^{-y} = 0 \\ (2y - x^2 - y^2)\,e^{-y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y - 0 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y(2-y) = 0 \end{cases}$$

$\underline{x}_0 = (0,0)$ e $\underline{x}_1 = (0,2)$ SONO I PUNTI STAZ. DI f

2. $\Rightarrow f(x,y) = (x^2+y^2)\,e^{-y} \Leftarrow$

CLASSIFICO I PUNTI STAZIONARI

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 2e^{-y} & -2xe^{-y} \\ -2xe^{-y} & (x^2+y^2-4y+2)\,e^{-y} \end{pmatrix}$$

$$H(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H(\underline{x}_0) > 0 \ \& \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{x}_0) > 0 \Rightarrow \underline{x}_0 \text{ MINIMO REL.}$$

$$H(\underline{x}_1) = \begin{pmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & -2e^{-2} \end{pmatrix} \Rightarrow \det H(\underline{x}_1) < 0 \Rightarrow \underline{x}_1 \text{ PUNTO DI SELLA}$$

OK

3. $\rightarrow f(x,y) = x^3 + x^2 y - y^2 - 4y \leftarrow$

DETERMINO I PUNTI STAZIONARI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2y - 4$$

$$\begin{cases} x(3x+2y) = 0 \\ x^2 - 2y - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \text{ OPPURE } \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ x = -4 \text{ o } x = 1 \end{cases}$$

$\underline{x}_1 = (0,-2)$, $\underline{x}_2 = (-4,6)$, $\underline{x}_3 = (1,-\frac{3}{2})$ SONO I PUNTI STAZIONARI DI f

3. $\to f(x,y) = x^3 + x^2 y - y^2 - 4y \leftarrow$

CLASSIFICO I PUNTI STAZIONARI

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+2y & 2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix}$$

$$H(\underline{x}_1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H(\underline{x}_1) > 0 \ \& \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{x}_1) < 0 \Rightarrow \underline{x}_1$$ MASSIMO REL.

$$H(\underline{x}_2) = \begin{pmatrix} -12 & -8 \\ -8 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H(\underline{x}_2) < 0 \Rightarrow \underline{x}_2$$ PUNTO DI SELLA

$$H(\underline{x}_3) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H(\underline{x}_3) < 0 \Rightarrow \underline{x}_3$$ PUNTO DI SELLA

ok

4. $\rightarrow f(x,y,z) = x^3 - 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + xz - yz + 3z \leftarrow$

DETERMINO I PUNTI STAZIONARI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4x - 2y + z \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2x - z \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + x - y + 3$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x - 2y + z = 0 \\ 2y - 2x - z = 0 \\ 2z + x - y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4x - \cancel{2y} + \cancel{2y} - 2x = 0 \\ z = 2y - 2x \\ 4y - 4x + x - y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x(x-2) = 0 \\ z = 2y - 2x \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$\underline{x}_1 = (0, -1, -2)$ e $\underline{x}_2 = (2, 1, -2)$ SONO I PUNTI STAZIONARI DI f

4. $\rightarrow f(x,y,z) = x^3 - 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + xz - yz + 3z \leftarrow$

CLASSIFICO I PUNTI STAZIONARI

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x-4 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H(\underline{x}_1) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \text{CALCOLA GLI} \\ \text{AUTOVALORI} \\ \text{PER ESERCIZIO} \end{array} \right) \Rightarrow \underline{x}_1 \text{ PUNTO DI SELLA}$$

$$H(\underline{x}_2) = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} d_1 > 0 \\ d_2 > 0 \\ d_3 > 0 \end{array} \Rightarrow \underline{x}_2 \text{ MINIMO REL.}$$

OK

ESERCIZIO

DETERMINARE I PUNTI STAZIONARI DELLA FUNZIONE

$$f(x,y) = (x^2 + xy + y^2)\, e^{x+2y}$$

$$f(x,y) = (x^2 + xy + y^2)\, e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2x+y)\, e^{x+2y} + (x^2+xy+y^2)\, e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2y+x)\, e^{x+2y} + 2\,(x^2+xy+y^2)\, e^{x+2y}$$

$$\begin{cases} (2x+y)\, e^{x+2y} + (x^2+xy+y^2)\, e^{x+2y} = 0 & \mathrm{I} \\ (2y+x)\, e^{x+2y} + 2\,(x^2+xy+y^2)\, e^{x+2y} = 0 & \mathrm{II} \end{cases} \iff$$

$$f(x,y) = (x^2 + xy + y^2)\,e^{x+2y}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+y)e^{x+2y} + (x^2+xy+y^2)e^{x+2y} = 0 & \mathrm{I} \\ 2(2x+y)e^{x+2y} - (2y+x)e^{x+2y} = 0 & 2\,\mathrm{I} - \mathrm{II} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+y)e^{x+2y} + (x^2+xy+y^2)e^{x+2y} = 0 \\ 4x + \cancel{2y} - \cancel{2y} - x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\,e^{2y} + y^2 e^{2y} = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2y}(y(y+1)) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} (x,y) = (0,0) \\ \text{OPPURE} \\ (x,y) = (0,-1) \end{array}$$

OK

ESERCIZI

DETERMINARE e CLASSIFICARE I PUNTI STAZIONARI DELLE SEGUENTI FUNZIONI

1. $f(x,y) = (2x-y)\left(3-(2x-y)^2\right)$

2. $f(x,y) = (x+5y)^3 - 4x - 20y$

P.S. NOTA CHE ENTRAMBE LE FUNZIONI SONO DELLA FORMA $f(x,y) = g(ax+by)$

1. $\rightarrow f(x,y) = (2x-y)\left(3-(2x-y)^2\right) \leftarrow$

IMPONGO $t = 2x - y$ E STUDIO $g(t) = t(3-t^2)$

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g \in C^2(\mathbb{R})$

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 1(3-t^2) + t(-2t) = 0$

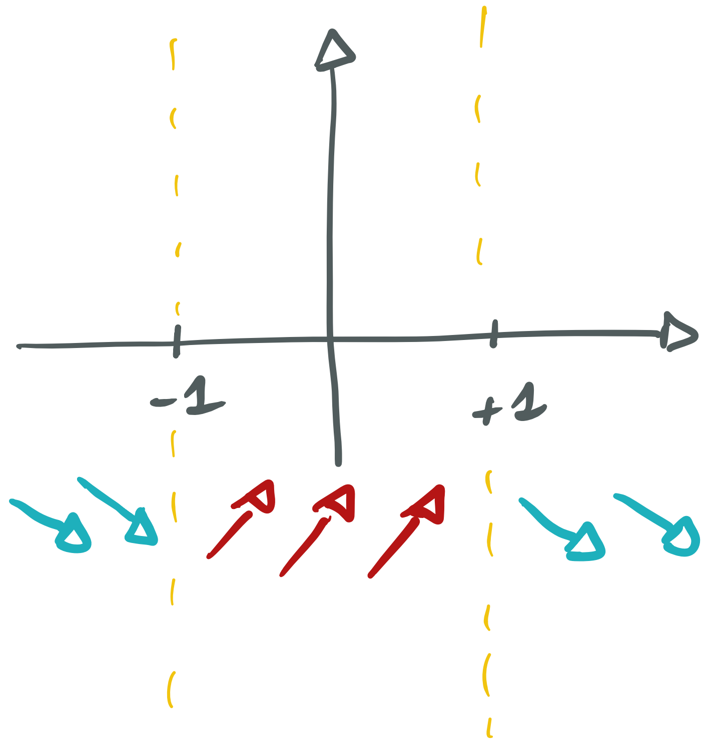
$\Leftrightarrow 3 - t^2 - 2t^2 = 0 \Leftrightarrow 3(1-t^2) = 0$

$\Leftrightarrow t = \pm 1$

$t = -1$ E $t = +1$ SONO I PUNTI STAZIONARI DI g

1. $\rightarrow f(x,y) = (2x-y)\left(3-(2x-y)^2\right) \leftarrow$

$g'(t) \geq 0 \iff 1-t^2 \geq 0 \iff -1 \leq t \leq 1$



$t=-1$ è MINIMO REL. PER g

$t=1$ è MASSIMO REL. PER g

$t = 2x - y \Rightarrow y = 2x - t$

LUNGO QUESTE RETTE $g(t)$ è COSTANTE

1. $\longrightarrow f(x,y) = (2x-y)\left(3-(2x-y)^2\right) \longleftarrow$

$t=-1 \iff 2x-y=-1 \iff y=2x+1$

$t=-1$ è MINIMO REL. PER g

$\Downarrow$

I PUNTI DEL TIPO $(x, 2x+1)$ SONO MINIMI RELATIVI PER f

$t=+1 \iff 2x-y=+1 \iff y=2x-1$

$t=+1$ è MASSIMO REL. PER g

$\Downarrow$

I PUNTI DEL TIPO $(x, 2x-1)$ SONO MASSIMI RELATIVI PER f

OK

2. $f(x,y) = (x+5y)^3 - 4x - 20y$

IMPONENDO $t = x+5y$, STUDIO LA FUNZIONE

$$g(t) = t^3 - 4t$$

(CONTINUATE PER ESERCIZIO)

OK

ESERCIZI

DETERMINARE e CLASSIFICARE I PUNTI STAZIONARI DELLE FUNZIONI DELLA FORMA $f(x,y)=g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ CON:

1. $g(t) = t$

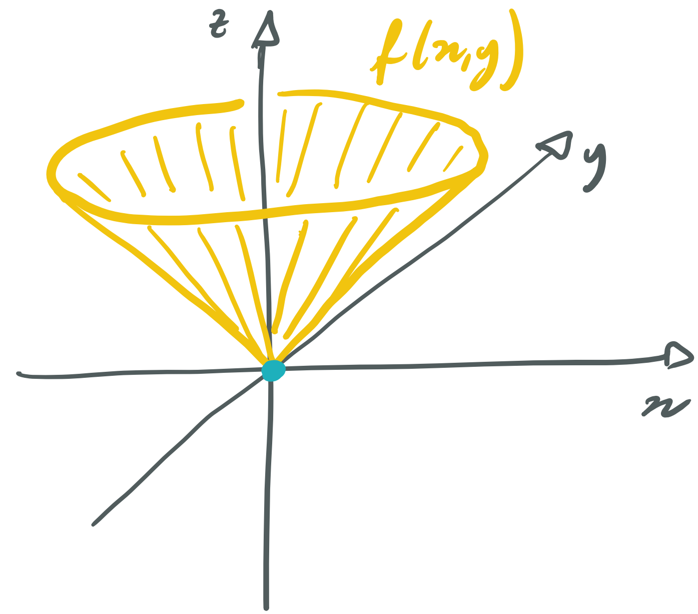
2. $g(t) = t(t-1)(t-2)$

3. $g(t) = t^2(t-1)(t-2)$

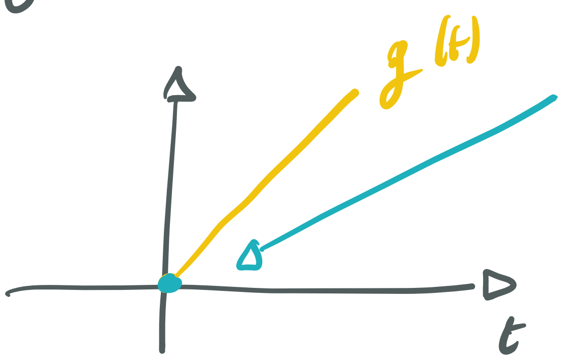
1. $f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ con $g(t) = t$

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

NON DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$



$g(t) = t$ $\qquad x^2+y^2 \geq 0 \iff t \geq 0$ i.e. $t \in [0,+\infty)$



$t=0$ è MINIMO REL. PER g

$\Downarrow$

$(0,0)$ è MINIMO REL. PER f

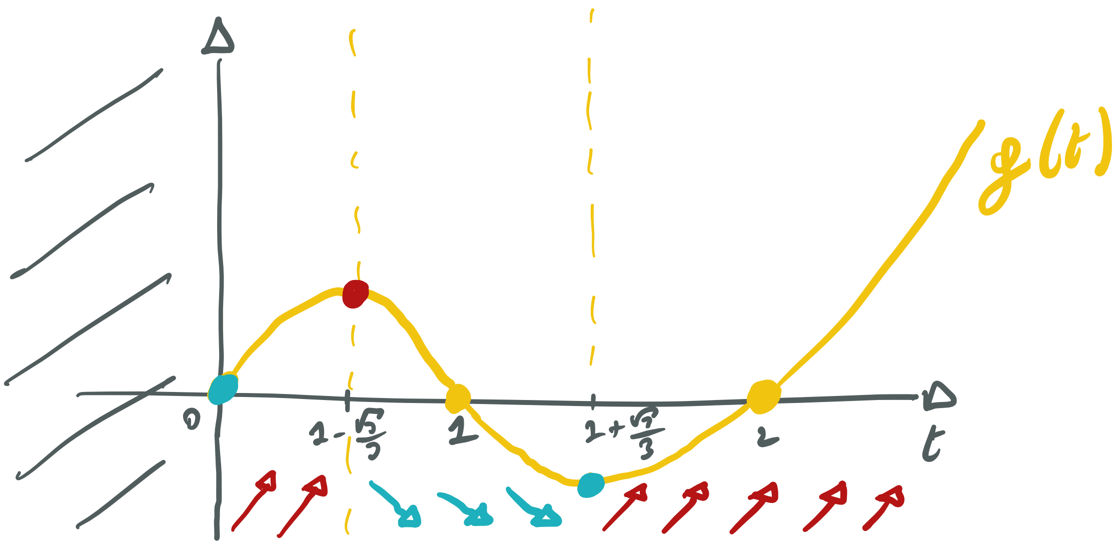
OK

2. $\rightarrow f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ con $g(t) = t(t-1)(t-2) \leftarrow$

$$g(t) = t(t-1)(t-2) = t^3 - 3t^2 + 2t \qquad t \in [0,+\infty)$$

$$g'(t) = 0 \iff 3t^2 - 6t + 2 = 0 \iff t = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$g'(t) \geq 0 \iff 0 \leq t \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \ \vee \ t \geq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

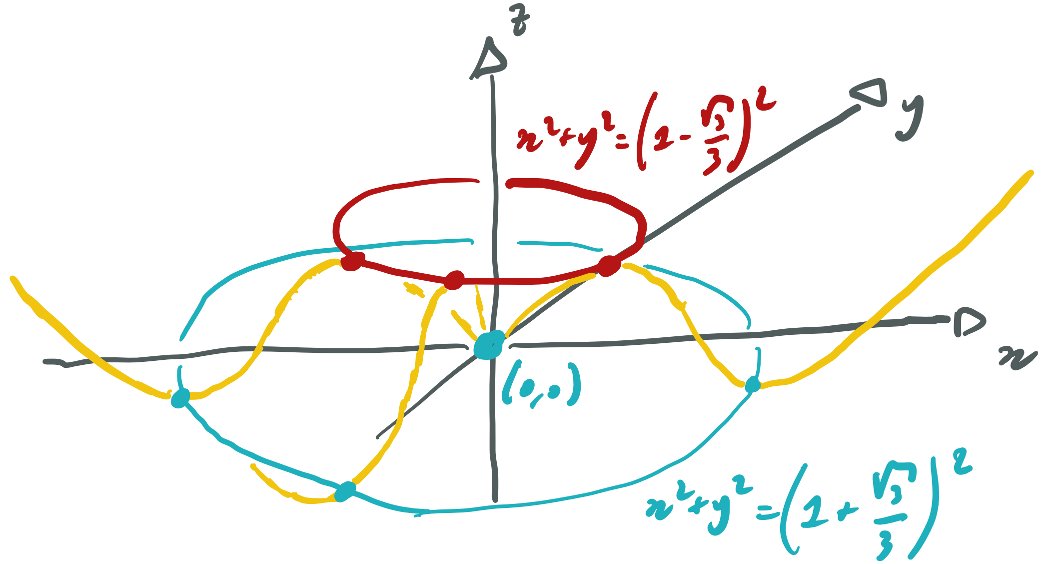


$\Rightarrow$ $t=0$ e $t = 1 + \sqrt{3}/3$ SONO MINIMI REL. PER g

$t = 1 - \sqrt{3}/3$ è MASSIMO REL. PER g

2. $\rightarrow f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ con $g(t) = t\,(t-1)\,(t-2) \leftarrow$

RUOTANDO $g(t)$ ATTORNO ALL'ASSE z OTTENGO $f(x,y) \longrightarrow$



(0,0) e i PUNTI (x,y) TALI CHE $\sqrt{x^2+y^2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ SONO DI MINIMO RELATIVO PER f

I PUNTI (x,y) TALI CHE $\sqrt{x^2+y^2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ SONO DI MASSIMO RELATIVO PER f

OK

3. $\rightarrow f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ con $g(t) = t^2(t-1)(t-2) \leftarrow$

(PER ESERCIZIO)

OK