Esercizi su Massimi & Minimi Relativi di Funzioni di Più Variabili

- Massimi e minimi relativi

MASSIMI E MINIMI RELATIVI

DATI $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x}_0 \in A$.

- $\underline{x}_0$ È **MASSIMO RELATIVO** SE ESISTE UN INTORNO SFERICO $B_r(\underline{x}_0)$ t.c. $\forall\ \underline{x} \in B_r(\underline{x}_0)$

$$f(\underline{x}_0) \geq f(\underline{x})$$

- $\underline{x}_0$ È **MINIMO RELATIVO** SE ESISTE UN INTORNO SFERICO $B_r(\underline{x}_0)$ t.c. $\forall\ \underline{x} \in B_r(\underline{x}_0)$

$$f(\underline{x}_0) \leq f(\underline{x})$$

MASSIMI e MINIMI RELATIVI

COME DETERMINARE I MASSIMI e I MINIMI RELATIVI DI UNA FUNZIONE $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$?

1. DETERMINARE I PUNTI STAZIONARI

CIOÈ I PUNTI $\underline{x}_0 \in A$ PER CUI $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

2. CLASSIFICARE I PUNTI STAZIONARI

- SE $H(\underline{x}_0)$ È DEFINITA POSITIVA $\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ È MINIMO REL.
- SE $H(\underline{x}_0)$ È DEFINITA NEGATIVA $\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ È MASSIMO REL.
- SE $H(\underline{x}_0)$ È INDEFINITA $\Rightarrow$ $\underline{x}_0$ È PUNTO DI SELLA
- SE $H(\underline{x}_0)$ HA DETERMINANTE NULLO $\Rightarrow$ (VEDREMO QUESTO CASO PIÙ AVANTI)

MASSIMI E MINIMI RELATIVI

- HESSIANA $H(\underline{x}_0)$ DI f IN $\underline{x}_0$ HA COME ELEMENTO IN POSIZIONE i,j $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}_0)$

- $H(\underline{x}_0)$ DEFINITA POSITIVA $\overset{DEF.}{\Longleftrightarrow} \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\},\ \underline{v} \cdot H(\underline{x}_0)\underline{v} > 0$

- $H(\underline{x}_0)$ DEFINITA NEGATIVA $\overset{DEF.}{\Longleftrightarrow} \forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\},\ \underline{v} \cdot H(\underline{x}_0)\underline{v} < 0$

- $H(\underline{x}_0)$ INDEFINITA $\overset{DEF.}{\Longleftrightarrow} \exists\ \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\underline{v} \cdot H(\underline{x}_0)\underline{v} > 0$ & $\underline{w} \cdot H(\underline{x}_0)\underline{w} < 0$

MASSIMI E MINIMI RELATIVI

- HESSIANA $H(\underline{x}_0)$ DI f IN $\underline{x}_0$ HA COME ELEMENTO IN POSIZIONE i,j $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}_0)$

- $H(\underline{x}_0)$ DEFINITA POSITIVA $\Longleftrightarrow$ TUTTI I SUOI AUTOVALORI SONO POSITIVI

- $H(\underline{x}_0)$ DEFINITA NEGATIVA $\Longleftrightarrow$ TUTTI I SUOI AUTOVALORI SONO NEGATIVI

- $H(\underline{x}_0)$ INDEFINITA $\Longleftrightarrow$ HA ALMENO UN AUTOVALORE POSITIVO E ALMENO UNO NEGATIVO

ESEMPI (PAG. 28 - 31)

DETERMINARE E CLASSIFICARE I PUNTI STAZIONARI DELLE SEGUENTI FUNZIONI

0. $f(x,y) = x^2 - y^2$

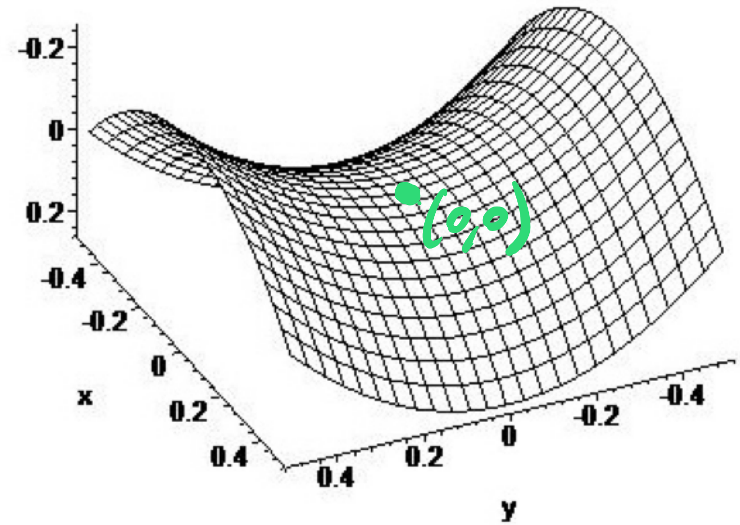
1. $f(x,y) = x^2 + y^3 - xy$

2. $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz$

3. $f(x,y) = 3x^2 - y^2 + 2xy - x$

0. $\longrightarrow f(x,y) = x^2 - y^2 \longleftarrow$

DETERMINO I PUNTI STAZIONARI



$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

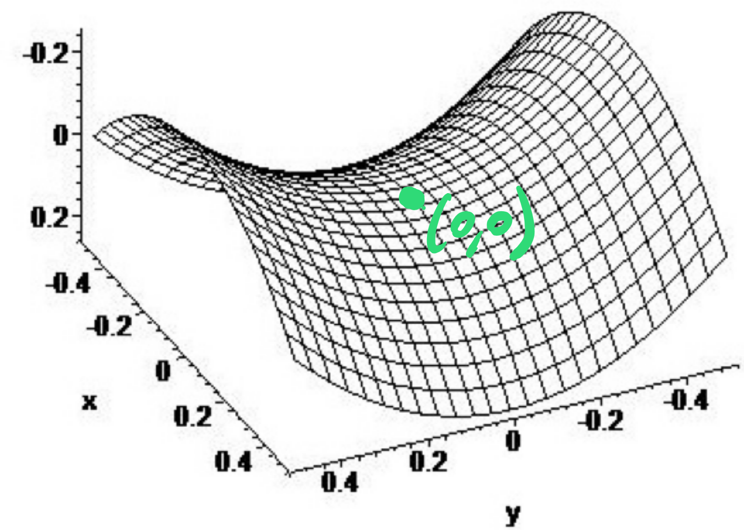
$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0) \leftarrow \text{UNICO PUNTO STAZIONARIO}$$

CLASSIFICO I PUNTI STAZIONARI

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$$

0. $\longrightarrow f(x,y) = x^2 - y^2 \longleftarrow$

$$\Rightarrow H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$



HA AUTOVALORI 2 e -2 $\Rightarrow$ $H(0,0)$ INDEFINITA

QUINDI $(0,0)$ è UN PUNTO DI SELLA

OK

1. $\longrightarrow f(x,y) = x^2 + y^3 - xy \longleftarrow$

DETERMINO I PUNTI STAZIONARI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - x$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3y^2 - x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 3(2x)^2 - x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x(12x - 1) = 0 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow (x,y) = (0,0)$ OPPURE $(x,y) = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)$

1. $f(x,y) = x^2 + y^3 - xy$

CLASSIFICO I PUNTI STAZIONARI

$$H(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6y \end{pmatrix}$$

$\underline{x}_1 = (0,0)$

$$H(\underline{x}_1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- è DEF. POSITIVA?
- è DEF. NEGATIVA?
- è INDEFINITA?

PER SCOPRIRLO, CALCOLO GLI AUTOVALORI DI $H(\underline{x}_1)$

1. $\longrightarrow f(x,y) = x^2 + y^3 - xy \longleftarrow$

$$\det\left(H(\underline{x}_1) - \lambda I\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda) - (-1)(-1) =$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 1$$

IMPONENDO IL POLINOMIO CARATTERISTICO $= 0$, OTTENGO

$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2} > 0$ e $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2} < 0 \Rightarrow H(\underline{x}_1)$ è INDEFINITA

$\Rightarrow (0,0)$ è PUNTO DI SELLA

1. $\longrightarrow f(x,y) = x^2 + y^3 - xy \longleftarrow$

$\underline{x}_2 = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)$

$$H(\underline{x}_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{DET}\left(H(\underline{x}_2) - \lambda I\right) = \mathrm{DET}\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 1$$

IMPONENDO IL POLINOMIO CARATTERISTICO $= 0$, OTTENGO

$\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 0$ e $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} > 0 \Rightarrow H(\underline{x}_2)$ è DEF. POSITIVA

$\Rightarrow \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)$ è MINIMO RELATIVO

OK

2. $\longrightarrow f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz \longleftarrow$

DETERMINO I PUNTI STAZIONARI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - z \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y + x \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z - x$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 4y + x = 0 \\ 2z - x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \text{--- --- ---} \Longleftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$$

è l'UNICO PUNTO STAZIONARIO

2. $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz$

CLASSIFICO I PUNTI STAZIONARI

$$H(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = H(0,0,0)$$

$$\det\left(H(0,0,0) - \lambda I\right) = 0 \iff \cdots \iff -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 18\lambda + 10 = 0$$

TALE EQUAZIONE AMMETTE SOLO SOLUZIONI POSITIVE $\Rightarrow$

$H(0,0,0)$ è DEF. POSITIVA $\Rightarrow$ $(0,0,0)$ è MINIMO RELATIVO

OK

3. $\longrightarrow f(x,y) = 3x^2 - y^2 + 2xy - x \longleftarrow$

DETERMINO I PUNTI STAZIONARI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 2y - 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 2x$$

$$\begin{cases} 6x + 2y - 1 = 0 \\ -2y + 2x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 8x - 1 = 0 \\ y = x \end{cases} \iff (x,y) = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$$

UNICO PUNTO STAZIONARIO

3. $\longrightarrow f(x,y) = 3x^2 - y^2 + 2xy - x \longleftarrow$

CLASSIFICO I PUNTI STAZIONARI

$$H(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = H\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$$

GLI AUTOVALORI DI $H\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ SONO

$$\lambda_1 = 2 - 2\sqrt{5} < 0 \qquad \lambda_2 = 2 + 2\sqrt{5} > 0 \Rightarrow$$

$H\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ e' INDEFINITA $\Rightarrow \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$ e' PUNTO DI SELLA

OK

MASSIMI E MINIMI RELATIVI

CI SONO ALTRI MODI PER CAPIRE SE $H(\underline{x}_0)$ È

DEFINITO POSITIVO O DEFINITO NEGATIVO O INDEFINITO?

VEDIAMO DUE METODI

I $\quad H(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix}$ È DEF. POSITIVA $\Leftrightarrow$

$\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad \underline{v} \cdot H \underline{v} > 0 \Leftrightarrow$

$(v_1, v_2) \cdot \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} > 0 \Leftrightarrow f''_{xx} v_1^2 + 2 f''_{xy} v_1 v_2 + f''_{yy} v_2^2 > 0$

MASSIMI e MINIMI RELATIVI

I $\quad H(\underline{x}_0)$ è DEFINITA POSITIVA $\quad \boxed{\text{PER } n=2}$

$$\Updownarrow$$

$$f''_{xx} v_1^2 + 2 f''_{xy} v_1 v_2 + f''_{yy} v_2^2 > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} f''_{xx} > 0 \\ \Delta/4 = {f''_{xy}}^2 - f''_{xx} f''_{yy} < 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{x}_0) > 0 \\ \det\left(H(\underline{x}_0)\right) > 0 \end{cases}$$

MASSIMI E MINIMI RELATIVI

I

PER $n=2$

ANALOGAMENTE,

$H(\underline{x}_0)$ è DEFINITA NEGATIVA

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{x}_0) < 0 \\ \det\left(H(\underline{x}_0)\right) > 0 \end{cases}$$

MASSIMI E MINIMI RELATIVI

I

$\boxed{\text{PER } n=2}$

ANALOGAMENTE,

$$H(\underline{x}_0) \text{ è INDEFINITA}$$

$$\Updownarrow$$

$$\det\big(H(\underline{x}_0)\big) < 0$$

Massimi e Minimi Relativi

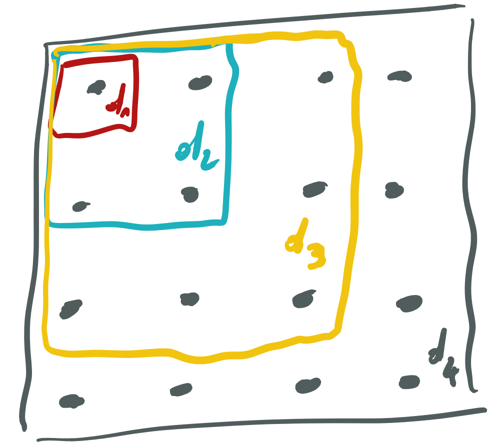
I Riassumendo:

Data $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $H(\underline{x}_0)$ è

- definita positiva $\iff$ $\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{x}_0) > 0 \\ \det\left(H(\underline{x}_0)\right) > 0 \end{cases}$
- definita negativa $\iff$ $\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{x}_0) < 0 \\ \det\left(H(\underline{x}_0)\right) > 0 \end{cases}$
- indefinita $\iff$ $\det\left(H(\underline{x}_0)\right) < 0$

MASSIMI E MINIMI RELATIVI

II CRITERIO DI SYLVESTER



SE INDICO CON d_i IL DETERMINANTE DELLA SOTTOMATRICE COMPOSTA DALLE PRIME i RIGHE E i COLONNE DI $H(\underline{x}_0)$ SI HA CHE:

- $d_i > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \iff H(\underline{x}_0)$ è DEFINITA POSITIVA

- $\forall i$ DISPARI $d_i < 0$, $\forall i$ PARI $d_i > 0$ $\iff H(\underline{x}_0)$ è DEFINITA NEGATIVA

ESERCIZI

DETERMINARE E CLASSIFICARE I PUNTI STAZIONARI DELLE SEGUENTI FUNZIONI

1. $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$

2. $f(x,y) = 4y^4 - 16x^2y + x$

3. $f(x,y) = 2(x^4 + y^4 + 1) - (x+y)^2$

1. $\longrightarrow f(x,y) = x^3 + y^3 + xy \longleftarrow$

DETERMINO I PUNTI STAZIONARI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + x$$

$$\begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ 3y^2 + x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -3x^2 \\ 3(-3x^2)^2 + x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -3x^2 \\ x(27x^3 + 1) = 0 \end{cases} \begin{matrix} \nearrow x = 0 \\ \searrow x = -\frac{1}{3} \end{matrix}$$

$\Longleftrightarrow (x,y) = (0,0)$ OPPURE $(x,y) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

1. $\longrightarrow f(x,y) = x^3 + y^3 + xy \longleftarrow$

CLASSIFICO I PUNTI STAZIONARI

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{pmatrix}$$

$\underline{x}_1 = (0,0)$

$$H(\underline{x}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det(H(\underline{x}_2)) < 0$$

$\Leftrightarrow H(\underline{x}_2)$ è INDEFINITA $\Rightarrow \underline{x}_1$ è PUNTO DI SELLA

1. $\longrightarrow f(x,y) = x^3 + y^3 + xy \longleftarrow$

$\underline{x}_2 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$$H(\underline{x}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{x}_2) < 0$ & $\det(H(\underline{x}_2)) = 3 > 0 \Leftrightarrow H(\underline{x}_2)$ è DEF. NEGATIVA

$\Rightarrow \underline{x}_2$ è PUNTO DI MASSIMO RELATIVO

OK

2. $\longrightarrow f(x,y) = 4y^4 - 16x^2y + x \longleftarrow$

DETERMINO I PUNTI STAZIONARI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -32xy + 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 16y^3 - 16x^2$$

$$\begin{cases} -32xy + 1 = 0 \\ 16y^3 - 16x^2 = 0 \end{cases} \iff \cancel{\begin{cases} y = \dfrac{1}{32x} \\ 16\left(\dfrac{1}{32x}\right)^3 - 16x^2 = 0 \end{cases}}$$

$$\Downarrow \quad \begin{cases} -32\, x^{5/3} + 1 = 0 \\ y = x^{2/3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{(2^{\cancel{5}})^{3/\cancel{5}}} = \dfrac{1}{8} \\ y = \dfrac{1}{(2^{\cancel{3}})^{2/\cancel{3}}} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Longrightarrow (1/8, 1/4) \text{ è L'UNICO PUNTO STAZIONARIO DI } f$$

2. $\longrightarrow f(x,y) = 4y^4 - 16x^2y + x \longleftarrow$

CLASSIFICO I PUNTI STAZIONARI

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -32y & -32x \\ -32x & 48y^2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow H\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right) = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \det\left(H\left(1/8, 1/4\right)\right) = -24 - 16 = -40 < 0 \iff$$

$\iff H\left(1/8, \frac{1}{4}\right)$ è INDEFINITA $\Rightarrow \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$ è PUNTO DI SELLA

ok

3. $\longrightarrow f(x,y) = 2(x^4+y^4+1) - (x+y)^2 \longleftarrow$

DETERMINO I PUNTI STAZIONARI

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 - 2x - 2y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 8y^3 - 2y - 2x$$

$$\begin{cases} 8x^3 - 2(x+y) = 0 & \text{I} \\ 8y^3 - 2(x+y) = 0 & \text{II} \end{cases} \iff \begin{cases} 8x^3 - 2(x+y) = 0 \\ 8x^3 - 8y^3 = 0 & \text{I} - \text{II} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 8x^3 - 2(2x) = 0 \\ y = x \end{cases} \iff \begin{cases} 4x(2x^2 - 1) = 0 \\ y = x \end{cases} \iff \begin{array}{ll} (x,y) = (0,0) & x_0 \\ (x,y) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) & x_1 \\ (x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) & x_2 \end{array}$$

3. $\longrightarrow f(x,y) = 2(x^4+y^4+1)-(x+y)^2 \longleftarrow$

CLASSIFICO I PUNTI STAZIONARI

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 24x^2-2 & -2 \\ -2 & 24y^2-2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \underline{x}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$H(\underline{x}_1) = H(\underline{x}_2) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

3. $\longrightarrow f(x,y) = 2(x^4+y^4+1)-(x+y)^2 \longleftarrow$

$$\det(H(\underline{x}_1)) = \det(H(\underline{x}_2)) = 96 > 0$$

$\Longrightarrow$ &

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{x}_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\underline{x}_2) = 10 > 0$$

$\Longleftrightarrow$ $H(\underline{x}_1)$ e $H(\underline{x}_2)$ SONO DEF. POSITIVE $\Longrightarrow$ $\underline{x}_1$ e $\underline{x}_2$ SONO PUNTI DI MINIMO RELATIVO

3. $\longrightarrow f(x,y) = 2(x^4+y^4+1)-(x+y)^2 \longleftarrow$

$\underline{x}_0 = (0,0)$

$$H(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H(\underline{x}_0)) = 0 \Rightarrow ???$$

SE $H(\underline{x}_0)$ FOSSE INDEFINITA POTREI COMUNQUE CONCLUDERE CHE $\underline{x}_0$ SIA UN PUNTO DI SELLA

MA $H(\underline{x}_0)$ NON È INDEFINITA. QUINDI???

COME SI DETERMINA LA TIPOLOGIA DI $\underline{x}_0$?

MASSIMI E MINIMI RELATIVI

$\underline{x}_0$ è MINIMO RELATIVO $\overset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow}$ SE $\exists$ INTORNO SFERICO $B_r(\underline{x}_0)$ t.c. $\forall\, \underline{x} \in B_r(\underline{x}_0)$, $f(\underline{x}_0) \leq f(\underline{x})$

$\underline{x}_0$ è MASSIMO RELATIVO $\overset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow}$ SE $\exists$ INTORNO SFERICO $B_r(\underline{x}_0)$ t.c. $\forall\, \underline{x} \in B_r(\underline{x}_0)$, $f(\underline{x}_0) \geq f(\underline{x})$

$\underline{x}_0$ è PUNTO DI SELLA $\overset{\text{DEF.}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, r_1, r_2$ RETTE PASSANTI PER $\underline{x}_0$ t.c.

$\underline{x}_0$ è MINIMO RELATIVO PER $f|_{r_1}$

$\underline{x}_0$ è MASSIMO RELATIVO PER $f|_{r_2}$

ATTENZIONE!!

$\exists$ PUNTI STAZIONARI CHE **NON** SONO NÉ MINIMI REL., NÉ MASSIMI REL., NÉ SELLE

MASSIMI E MINIMI RELATIVI

SE $\det(H(\underline{x}_0)) = 0$, NON ESISTE UN ALGORITMO O UNA STRATEGIA DI RISOLUZIONE STANDARD

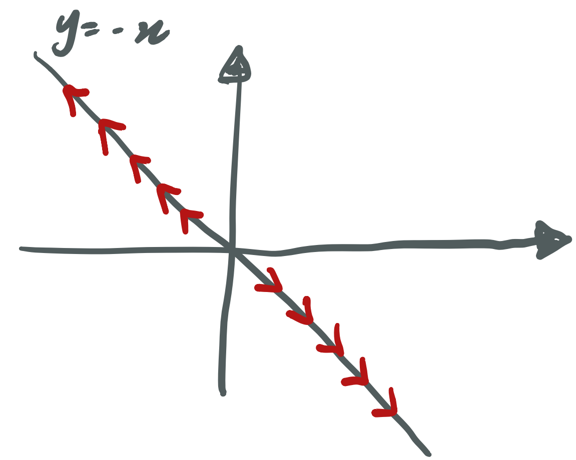
MA...

PUÒ ESSERE D'AIUTO INIZIARE A STUDIARE IL COMPORTAMENTO DI f IN $\underline{x}_0$ RESTRINGENDO LA FUNZIONE A RETTE O CAMMINI PASSANTI PER $\underline{x}_0$

3. $\longrightarrow f(x,y) = 2(x^4+y^4+1) - (x+y)^2 \longleftarrow$

TORNANDO A STUDIARE $\underline{x_0} = (0,0)$ DELL'ES. 3,

$$f\Big|_{y=-x}(x,y) = 2\left(x^4+(-x)^4+1\right) - \cancel{(x-x)^2} =$$



$$= 4x^4 + 2$$

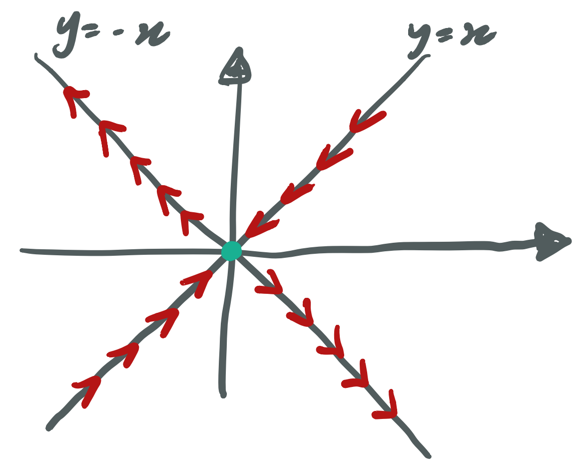
È UNA "PARABOLA" CON CONCAVITÀ RIVOLTA VERSO L'ALTO E MINIMO RELATIVO PER $x=0$

$\Rightarrow (0,0)$ È MINIMO REL. DI $f\big|_{y=-x}$

3. $\longrightarrow f(x,y) = 2(x^4+y^4+1)-(x+y)^2 \longleftarrow$

$$f\big|_{y=x}(x,y) = 2(x^4+x^4+1)-(x+x)^2 =$$

$$= 4x^4 - 4x^2 + 2$$



$\Rightarrow$ HO PUNTO DI MASSIMO RELATIVO PER $x=0$

(VERIFICATELO PER ESERCIZIO)

$\Rightarrow (0,0)$ è MASSIMO REL. DI $f\big|_{y=x}$

$\Rightarrow (0,0)$ è PUNTO DI SELLA DI f

OK