Esercizi su Derivate Direzionali & Differenziabilità

- Derivate direzionali
- Differenziabilità

DERIVATE DIREZIONALI

DATI $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x}_0$ PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER A,

$\underline{v}$ UN VERSORE DI $\mathbb{R}^n$,

SE ESISTE (FINITO),

$$\boxed{\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t}}$$

è DETTO DERIVATA DIREZIONALE DI f NELLA

DIREZIONE $\underline{v}$ IN $\underline{x}_0$ E DENOTATO CON $D_{\underline{v}} f(\underline{x}_0)$

DERIVATE DIREZIONALI

SE $\underline{v}$ COINCIDE CON UN VERSORE DELLA BASE CANONICA, i.e. $\underline{v} = \underline{e}_k$ DENOTEREMO

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x}_0) := D_{\underline{e}_k} f(\underline{x}_0)}$$

LA DERIVATA PARZIALE DI f RISPETTO A x_k IN $\underline{x}_0$

SI HA CHE $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x}_0) =$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[f(x_1^0, \dots, x_k^0 + t, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_k^0, \dots, x_n^0) \right]$$

ESERCIZI CALCOLARE LE DERIVATE DIREZIONALI IN $(0,0)$ DELLE SEGUENTI FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI:

1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3. $f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}\right)^2 & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1\.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

DATO $\underline{v}=(\alpha,\beta)$ UN VERSORE DI $\mathbb{R}^2$

$$D_{\underline{v}}f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t\alpha,0+t\beta)-f(0,0)}{t}$$ (SE ESISTE)

$$\frac{f(0+t\alpha,0+t\beta)-f(0,0)}{t}=\frac{\frac{t\alpha t\beta}{t^2\alpha^2+t^2\beta^2}-0}{t}=\frac{\cancel{t^2}\alpha\beta}{\cancel{t^3}(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$\longrightarrow \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \longleftarrow$$

$$\frac{\alpha\beta}{t(\alpha^2+\beta^2)}$$

$\rightarrow$ se $\alpha = 0$ o $\beta = 0$,

$$\Rightarrow \frac{\alpha\beta}{t(\alpha^2+\beta^2)} = 0 \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

$\rightarrow$ ALTRIMENTI SE $\alpha \neq 0$ & $\beta \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{\alpha\beta}{t(\alpha^2+\beta^2)} \xrightarrow[t \to 0]{} \infty$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ESISTONO LE DERIVATE PARZIALI $D_{\underline{e}_1} f(0,0)$ e $D_{\underline{e}_2} f(0,0)$

(ENTRAMBE $= 0$)

PER OGNI ALTRO VERSORE $\underline{v} = (\alpha, \beta)$,

(i.e., $\underline{v} \neq (1,0)$ o $\underline{v} \neq (0,1)$)

LA DERIVATA DIREZIONALE $D_{\underline{v}} f(0,0)$ NON ESISTE

$$\longrightarrow \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \longleftarrow$$

DOMANDA: L'ESISTENZA DELLE DERIVATE PARZIALI IN $\underline{x}_0$ È SUFFICIENTE A GARANTIRE LA CONTINUITÀ DI f IN $\underline{x}_0$?

NO INFATTI,

$$f(x,y)\Big|_{y=0} = \frac{0}{x^2} = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$f(x,y)\Big|_{y=x} = \frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}$$

DIVERSI

$\Downarrow$

$\nexists$ LIMITE

OK

2. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

DATO $\underline{v} = (\alpha, \beta)$ UN VERSORE DI $\mathbb{R}^2$

$$D_{\underline{v}} f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0+t\alpha, 0+t\beta) - f(0,0)}{t}$$ (SE ESISTE)

$$\frac{f(0+t\alpha, 0+t\beta) - f(0,0)}{t} = \frac{t^3 \alpha \beta^2}{t(t^2\alpha^2 + t^4\beta^4)} = \frac{\cancel{t^3} \alpha \beta^2}{\cancel{t^3}(\alpha^2 + t^2\beta^4)}$$

$$\longrightarrow \quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases} \quad \longleftarrow$$

$$\frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2+t^2\beta^4}$$

$\hookrightarrow$ se $\alpha=0$ o $\beta=0$,

$$\Rightarrow \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2+t^2\beta^4}=0 \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

$\hookrightarrow$ ALTRIMENTI SE $\alpha\neq 0$ & $\beta\neq 0$

$$\Rightarrow \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2+t^2\beta^4} \longrightarrow \frac{\cancel{\alpha}\beta^2}{\alpha^{\cancel{2}}}=\frac{\beta^2}{\alpha}$$

$$t^2\beta^4 \to 0$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\forall$ VERSORE $\underline{v}=(\alpha,\beta)$ ESISTE LA DERIVATA DIREZIONALE $D_{\underline{v}} f(0,0)$

$$D_{\underline{v}} f(0,0)=\begin{cases}0 & \text{se } \alpha=0 \text{ o } \beta=0\\ \beta^2/\alpha & \text{ALTRIMENTI}\end{cases}$$

NOTA

C'È "DISCONTINUITÀ" DELLA DERIVATA DIREZIONALE

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x y^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

DOMANDA: L'ESISTENZA DI TUTTE LE DERIVATE DIREZIONALI IN $\underline{x}_0$ È SUFFICIENTE A GARANTIRE LA CONTINUITÀ DI f IN $\underline{x}_0$?

NO INFATTI,

$$f(x,y)\Big|_{y=0} = \frac{0}{x^2} = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$f(x,y)\Big|_{x=y^2} = \frac{\cancel{y^4}}{2\cancel{y^4}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[y\to 0]{} \frac{1}{2}$$

DIVERSI

$\Downarrow$

$\nexists$ LIMITE

OK

3. $$f(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}\right)^2 & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

DATO $\underline{v}=(\alpha,\beta)$ UN VERSORE DI $\mathbb{R}^2$

$$D_{\underline{v}} f(0,0) = \lim_{t\to0} \frac{f(0+t\alpha,0+t\beta)-f(0,0)}{t} \qquad \text{(SE ESISTE)}$$

$$\frac{f(0+t\alpha,0+t\beta)-f(0,0)}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{t^{\cancel{3}}\alpha\beta^2}{\cancel{t^2}(\alpha^2+t^2\beta^4)}\right)^2 = \frac{t^{\cancel{2}}\alpha^2\beta^4}{\cancel{t}(\alpha^2+t^2\beta^4)^2}$$

$$\longrightarrow \quad f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}\right)^2 & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \longleftarrow$$

$$\frac{t\,\alpha^2\beta^4}{(\alpha^2+t^2\beta^4)^2} = \frac{t\,\alpha^2\beta^4}{\alpha^4+2t^2\alpha^2\beta^4+t^4\beta^8} = \frac{\cancel{t}\,\alpha^2\beta^4}{\cancel{t}\left(\underbrace{\frac{\alpha^4}{t}}_{\to +\infty}+\underbrace{2t\alpha^2\beta^4}_{\to 0}+\underbrace{t^3\beta^8}_{\to 0}\right)}$$

$$\xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

$\forall\ \underline{v} = (\alpha, \beta)$ VERSORE

(NON SOLO SE $\alpha = 0$ O $\beta = 0$)

$$\Longrightarrow \forall\ \underline{v} \qquad D_{\underline{v}} f(0,0) = 0$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}\right)^2 & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

DOMANDA: L'ESISTENZA $\underbrace{\text{DI TUTTE LE DERIVATE}}$ E LA "CONTINUITÀ" DIREZIONALI IN $\underline{x}_0$ È SUFFICIENTE A GARANTIRE LA CONTINUITÀ DI f IN $\underline{x}_0$?

NO INFATTI,

$$f(x,y)\Big|_{y=0} = \frac{0}{x^4} = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$f(x,y)\Big|_{x=y^2} = \left(\frac{\cancel{y^4}}{2\cancel{y^4}}\right)^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow[y \to 0]{} \frac{1}{4}$$

DIVERSI

$\Downarrow$

$\nexists$ LIMITE

OK

DIFFERENZIABILITÀ

DATI $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x}_0$ PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER A,

f È DIFFERENZIABILE IN $\underline{x}_0$

SE $\exists$ UN'APPLICAZIONE LINEARE $df(\underline{x}_0) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

(CHIAMATA DIFFERENZIALE DI f IN $\underline{x}_0$) TALE CHE, PER $\underline{h} \in \mathbb{R}^n$,

$$\boxed{\lim_{\underline{h} \to \underline{0}} \frac{f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) - df(\underline{x}_0)(\underline{h})}{\|\underline{h}\|} = 0}$$

---

f È DIFFERENZIABILE IN A SE f È DIFFERENZIABILE IN OGNI PUNTO DI A

DIFFERENZIABILITÀ

PROPRIETÀ

SE f È DIFFERENZIABILE IN $\underline{x}_0$, ALLORA $\forall$ VERSORE $\underline{v}$:

- f AMMETTE DERIVATA DIREZIONALE $D_{\underline{v}} f(\underline{x}_0)$
- $D_{\underline{v}} f(\underline{x}_0) = df(\underline{x}_0)(\underline{v})$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\underline{x}_0) = df(\underline{x}_0)(\underline{e}_k)$
- $df(\underline{x}_0)(\underline{v}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0)$ se $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$

DIFFERENZIABILITÀ

SE f È DIFFERENZIABILE IN $\underline{x}_0$, ALLORA:

- IL VETTORE $\nabla f(\underline{x}_0) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0)\underline{e}_i$ È DETTO **GRADIENTE** DI f IN $\underline{x}_0$

PRODOTTO SCALARE

- $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n, \quad df(\underline{x}_0)(\underline{v}) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v}$

- $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n, \quad df(\underline{x}_0)(\underline{v}) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot d\underline{x}(\underline{v})$

  DOVE $d\underline{x} = (dx_1, \dots, dx_n)$ E $dx_i(\underline{v}) = v_i$

SE $n=1$,

$$\boxed{f \text{ DIFFERENZIABILE} \Leftrightarrow f \text{ DERIVABILE}}$$

DIFFERENZIABILITÀ

TEOREMA 1

OGNI FUNZIONE DIFFERENZIABILE IN $\underline{x}_0$ È CONTINUA IN $\underline{x}_0$

TEOREMA 2

SE $\exists$ $B_r(\underline{x}_0)$ IN CUI f AMMETTE DERIVATE PARZIALI CHE SIANO CONTINUE IN $\underline{x}_0$, ALLORA f È DIFFERENZIABILE IN $\underline{x}_0$

ESERCIZIO

STUDIARE LA DIFFERENZIABILITÀ IN $x_0 = (0,0)$

DELLA SEGUENTE FUNZIONE:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}\right)^2 \sqrt{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}\right)^2 \sqrt{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

STUDIAMO LA CONTINUITÀ IN $(0,0)$

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right| \leq \frac{\cancel{x^2+y^4}}{2\,\cancel{(x^2+y^4)}} = \frac{1}{2}$$

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

VERIFICATELO!

QUINDI,

$$\left|\left(\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right)^2 \sqrt{x^2+y^2}\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{0} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}\right)^2 \sqrt{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ È CONTINUA IN $(0,0)$

CALCOLO LE DERIVATE DIREZIONALI $D_{\underline{v}} f(0,0)$ IN $(0,0)$

RISPETTO AD UN VERSORE $\underline{v} = (\alpha, \beta)$

VERIFICATELO!

$$\frac{f(0+t\alpha, 0+t\beta) - f(0,0)}{t} = \left(\frac{t^{\cancel{3}}\alpha\beta^2}{\cancel{t^2}(\alpha^2+t^2\beta^4)}\right)^2 \frac{|t|}{t} \underbrace{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}_{=1} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

QUINDI $D_{\underline{v}} f(0,0) = 0 \quad \forall$ VERSORE $\underline{v}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}\right)^2 \sqrt{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ABBIAMO UN "CANDIDATO DIFFERENZIALE $df(0,0)$"

DATO DA $df(0,0)(v) = 0 \quad \forall v$

f È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$ SE ESISTE ED È NULLO IL SEGUENTE LIMITE

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h, 0+k) - f(0,0) - df(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right)^2 \sqrt{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \Leftarrow$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left(\frac{hk^2}{h^2+k^4}\right)^2 \cancel{\sqrt{h^2+k^2}} - 0 - 0}{\cancel{\sqrt{h^2+k^2}}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(\frac{hk^2}{h^2+k^4}\right)^2 \Leftarrow \nexists \text{ LIMITE (VEDI LEZIONE PRECEDENTE)}$$

$\Rightarrow$ f NON è DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$

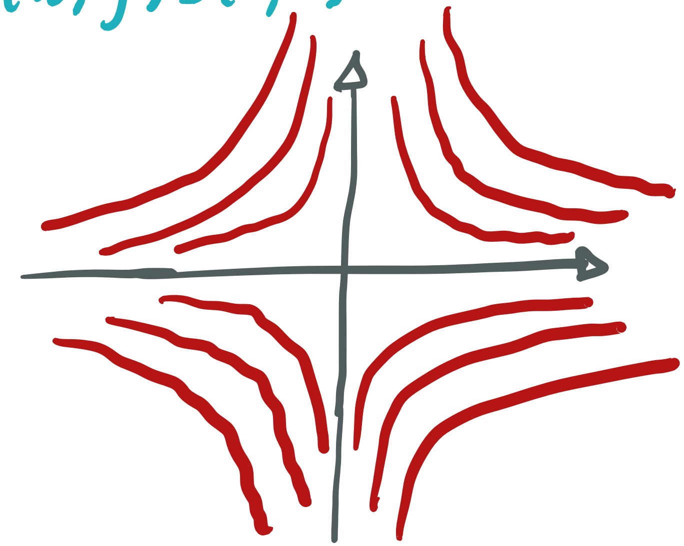
OK

ESERCIZIO

STUDIARE, AL VARIARE DI $\alpha \in \mathbb{R}$, LA DIFFERENZIABILITÀ IN $x_0 = (0,0)$ DELLA SEGUENTE FUNZIONE:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\tan(|xy|)}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\tan(|xy|)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$



DOMINIO

$$|xy| \neq \frac{\pi}{2}+K\pi \quad \text{con } K\in\mathbb{Z}$$

CIOÈ TUTTI I PUNTI DI $\mathbb{R}^2$ AD ECCEZIONE

DI QUELLI APPARTENENTI AD UNA DELLE IPERBOLI

EQUILATERE $\quad xy=\frac{\pi}{2}+K\pi$

IN PARTICOLARE, $\exists$ UN INTORNO DELL'ORIGINE IN CUI f È DEFINITA

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\tan(|xy|)}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f È CONTINUA IN $(0,0)$?

$\forall \alpha < 0$ $\quad \tan(|xy|) \cdot (x^2+y^2)^{-\alpha}$ È PRODOTTO DI FUNZIONI CONTINUE IN $(0,0)$ CON LIMITE 0

$\alpha = 0$ $\quad \tan(|xy|)$ È CONTINUA IN $(0,0)$ CON LIMITE 0

$\forall \alpha > 0$

$$\frac{\tan(|xy|)}{(x^2+y^2)^\alpha} = \frac{\dfrac{\tan(|xy|)}{|xy|}\,|xy|}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

$\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 1$ (LIMITE NOTEVOLE)

$$\rightarrow f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\tan(|xy|)}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases} \leftarrow$$

$\forall \alpha > 0$

$$\frac{|xy|}{(x^2+y^2)^\alpha} \leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^\alpha} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{1-\alpha}$$

SE $\alpha < 1$ (CIOÈ, $1-\alpha > 0$)

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{1-\alpha} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \Rightarrow f \text{ È CONTINUA IN } (0,0)$$

SE $\alpha = 1$ (CIOÈ, $1-\alpha = 0$)

$$\left.\frac{|xy|}{x^2+y^2}\right|_{x=0} = 0 \quad \text{MA} \quad \left.\frac{|xy|}{x^2+y^2}\right|_{x=y} = \frac{1}{2} \Rightarrow \nexists \text{ LIMITE}$$

$$\rightarrow f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\tan(|xy|)}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \leftarrow$$

$\forall \alpha > 0$

se $\alpha > 1$ (cioè, $1-\alpha < 0$)

$$f(x,y)\Big|_{y=x} = \frac{\tan x^2}{2^\alpha x^{2\alpha}} = \underbrace{\frac{\tan x^2}{x^2}}_{\to 1} \frac{1}{2^\alpha x^{2(\alpha-1)}} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$$

$\Rightarrow f$ NON è CONTINUA IN $(0,0)$

RIASSUMENDO,

f è CONTINUA IN $(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $\alpha < 1$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\tan(|xy|)}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

DERIVATE PARZIALI $(\alpha < 1)$

$$f(x,y)\Big|_{y=0} = \begin{cases} \dfrac{0}{x^{2\alpha}} = 0 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$f(x,y)\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

$\Rightarrow \forall \alpha < 1 \ \exists$ LE DERIVATE PARZIALI

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\tan(|xy|)}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

DIFFERENZIABILITÀ

LE DERIVATE PARZIALI CI DANNO UN CANDIDATO DIFFERENZIALE $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) \cdot \underline{v} = (0,0) \cdot \underline{v} = 0$

f È DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$ SE ESISTE ED È NULLO IL SEGUENTE LIMITE

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(0+h, 0+k) - f(0,0) - df(0,0)(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\tan(|xy|)}{(x^2+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{\tan(|hk|)}{(h^2+k^2)^\alpha} - 0 - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

--- CONTINUARE PER ESERCIZIO

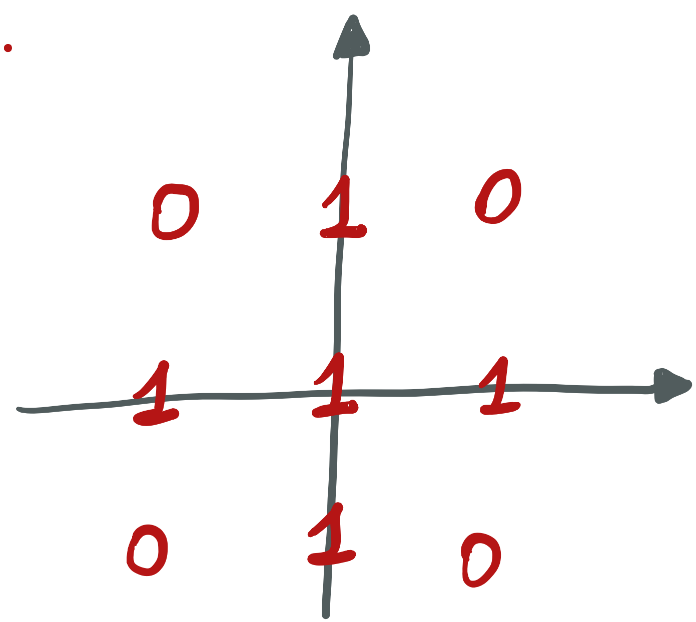
OK

ESERCIZI

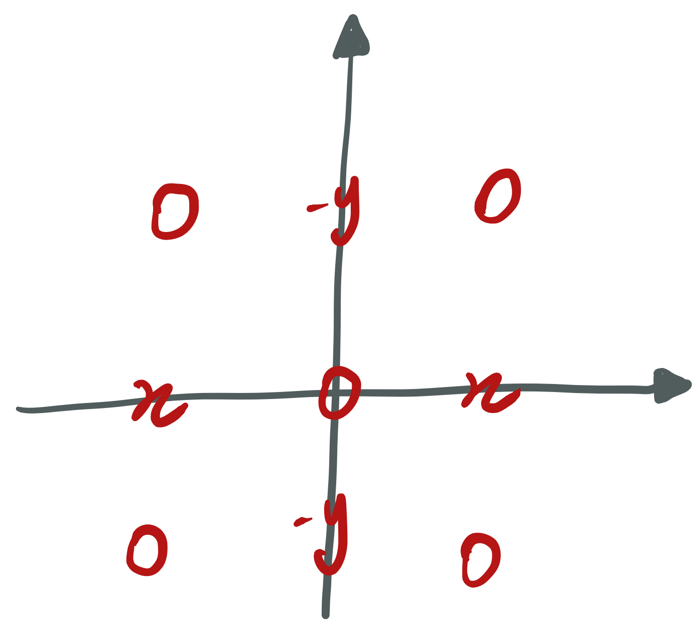
STUDIARE LA DIFFERENZIABILITÀ IN $x_0 = (0,0)$

DELLE SEGUENTI FUNZIONI:

1.

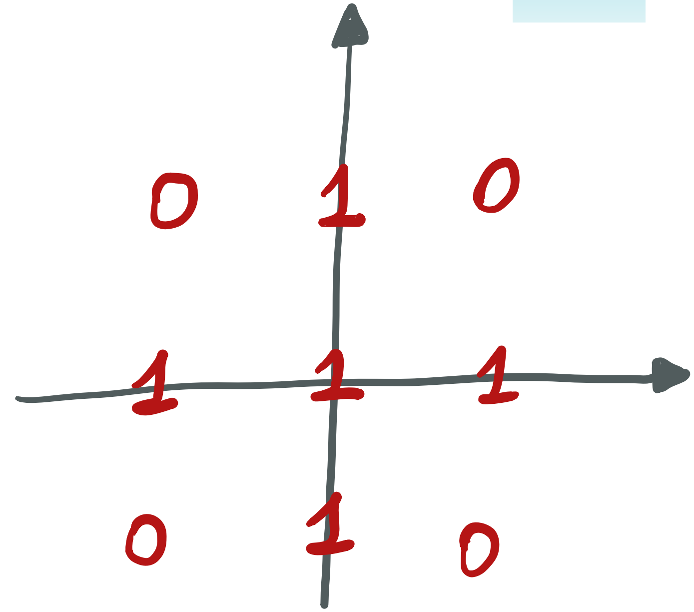


2.



1.

SI HA CHE LE DERIVATE PARZIALI IN $(0,0)$ ESISTONO E SONO NULLE



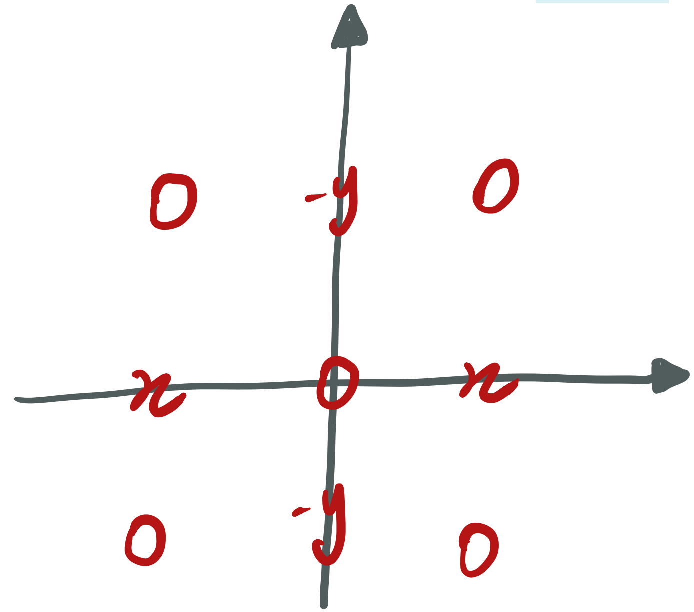
MA, NON ESSENDO CONTINUA IN $(0,0)$ LA FUNZIONE NON PUÒ ESSERE DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$

OK

2.

LE DERIVATE PARZIALI IN $(0,0)$

SONO RISPETTIVAMENTE



$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=1 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=-1$$

MA

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\overbrace{df(0,0)(h,k)}^{(1,-1)\cdot(h,k)}}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-(h-k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \longrightarrow \nexists \text{ LIMITE}$$

$\Downarrow$

f NON È DIFF. IN $(0,0)$

OK

ESERCIZIO

STUDIARE LA DIFFERENZIABILITÀ DELLA SEGUENTE FUNZIONE:

$$f(x,y) = e^{x^2+3y} \cdot \sin 2y$$

$$f(x,y) = e^{x^2+3y} \cdot \sin 2y$$

DOMINIO $\mathbb{R}^2$ e NON ESISTONO PUNTI "PATOLOGICI"

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2+3y} \cdot \sin 2y \cdot 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{x^2+3y} \cdot \sin 2y \cdot 3 + e^{x^2+3y} \cdot \cos 2y \cdot 2$$

FUNZIONE è DIFFERENZIABILE IN OGNI $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$

e $df(\underline{x}_0)(\underline{v}) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\underline{x}_0), \frac{\partial f}{\partial y}(\underline{x}_0) \right) \cdot \underline{v}$

OK