ESERCIZI SU
LIMITI DI FUNZIONI DI PIÚ VARIABILI

- LIMITI DI FUNZIONI DI PIÚ VARIABILI
- LIMITI IN COORDINATE POLARI

LIMITI DI FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

DATI $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x}_0$ PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER A,

$$\boxed{\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \ell} \iff \boxed{\begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \underline{x} \in \mathring{B}_\delta(\underline{x}_0) \cap A \\ \Downarrow \\ |f(\underline{x}) - \ell| < \varepsilon \end{array}}$$

ANALOGAMENTE,

$$\boxed{\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = +\infty \ [-\infty]} \iff \boxed{\begin{array}{c} \forall K > 0, \exists \delta > 0 : \underline{x} \in \mathring{B}_\delta(\underline{x}_0) \cap A \\ \Downarrow \\ f(\underline{x}) > K \ [< -K] \end{array}}$$

LIMITI DI FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

DATA $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ CON A NON LIMITATO

$$\boxed{\lim_{\underline{x} \to \infty} f(\underline{x}) = \ell} \iff \boxed{\begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \underline{x} \in A, \underline{x} \notin B_\delta(\underline{0}) \\ \Downarrow \\ |f(\underline{x}) - \ell| < \varepsilon \end{array}}$$

ANALOGAMENTE,

$$\boxed{\lim_{\underline{x} \to \infty} f(\underline{x}) = +\infty \; [-\infty]} \iff \boxed{\begin{array}{c} \forall K > 0, \exists \delta > 0 : \forall \underline{x} \in A, \underline{x} \notin B_\delta(\underline{0}) \\ \Downarrow \\ f(\underline{x}) > K \; [< -K] \end{array}}$$

ESERCIZI

CALCOLARE I SEGUENTI LIMITI DI FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI:

1. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy}$$

2. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$$

3. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$$

4. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$$

5. $$\lim_{(x,y)\to(0,\frac{\pi}{2})} \frac{1}{\sin^2 x+\cos^2 y}$$

6. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(x+y)}{x^2+y^2}$$

7. $$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

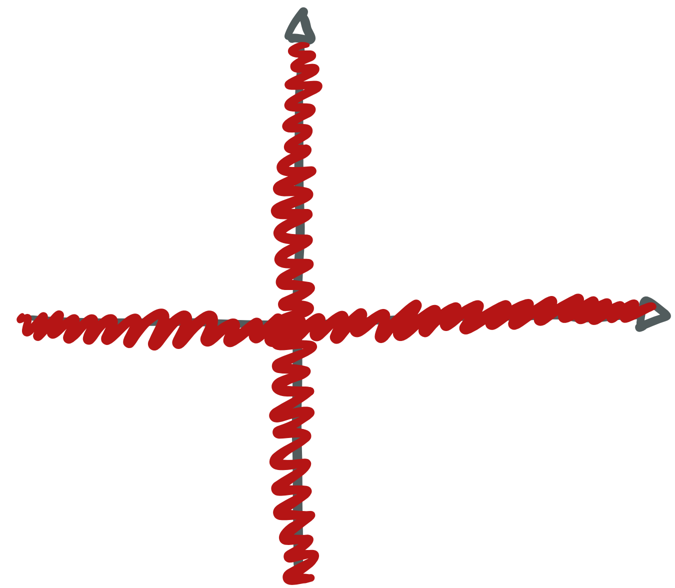
8. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$$

1. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy}$$

DOMINIO $\mathbb{R}^2 \setminus \left(\{x=0\} \cup \{y=0\}\right)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin \overbrace{xy}^{\to 0}}{\underbrace{xy}_{\to 0}} = 1$$

LIMITE NOTEVOLE



STO SFRUTTANDO CHE:

- $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ ← VERO PER PRIMO SEMESTRE
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$ ← VERIFICHIAMOLO FORMALMENTE

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy}$$

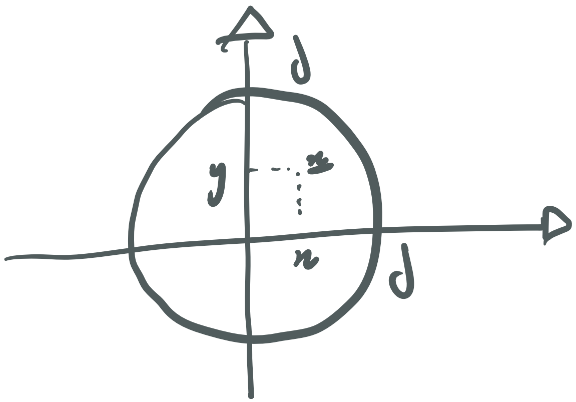
SULLA BASE DELLA DEFINIZIONE, DEVO DIMOSTRARE CHE:

$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \underline{x} \in B^{\circ}_{\delta}(\underline{0}) \cap A$ TALE CHE

$$|xy| < \varepsilon \quad (*)$$

CIOÈ, PRESO UN VALORE $\varepsilon > 0$, DEVO TROVARE UN VALORE δ (CHE DIPENDERÀ DA ε) PER CUI $(*)$ SIA VERIFICATA

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy}$$



$$\underline{x} = (x,y) \in B^\circ_\delta(\underline{0}) \cap A$$

$$\Rightarrow |x| < \delta \text{ e } |y| < \delta$$

$$\Rightarrow |xy| = |x||y| < \delta^2$$

SE SCELGO δ TALE CHE $\varepsilon = \delta^2$ (CIOÈ, $\delta = \sqrt{\varepsilon}$)

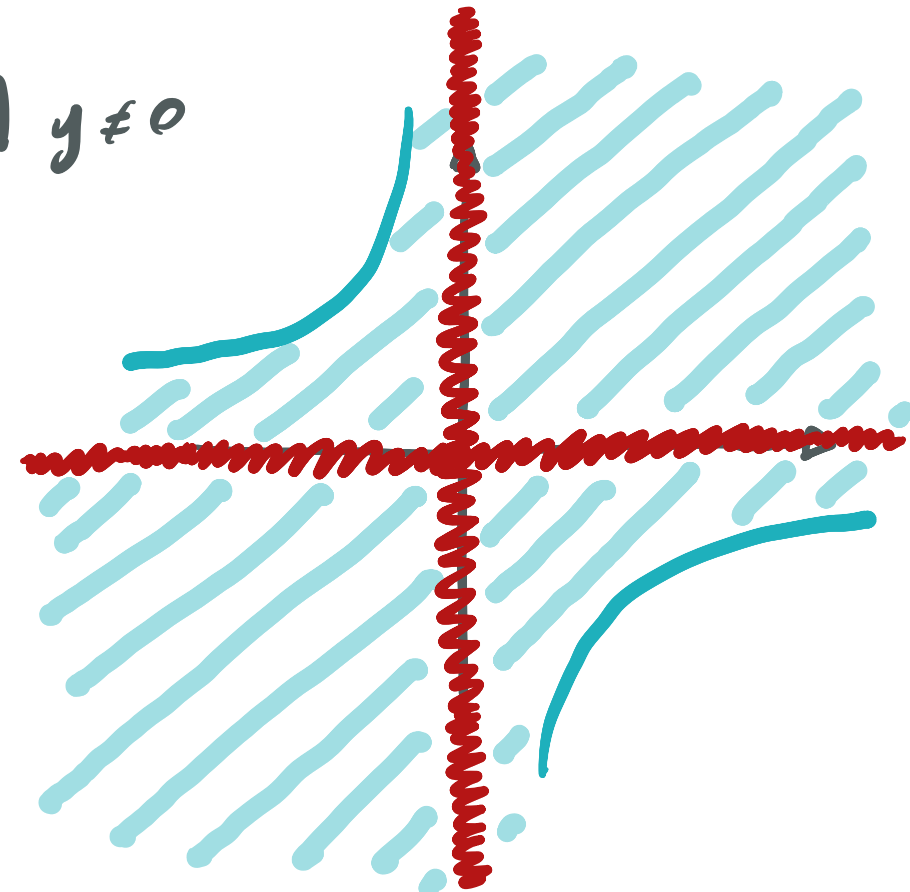
HO CHE (*) È VERIFICATA

OK

2.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$$

DOMINIO $\quad xy+4 \geq 0 \cap x \neq 0 \cap y \neq 0$



$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} \cdot \frac{2+\sqrt{xy+4}}{2+\sqrt{xy+4}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4-(xy+4)}{xy\left(2+\sqrt{xy+4}\right)} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-\cancel{xy}}{\cancel{xy}\left(2+\underbrace{\sqrt{xy+4}}_{\to 0}\right)_{\to 4}} = -\frac{1}{4}$$

OK

3.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$$

(DA SOLI)

SOLUZIONE: 2

ok

4. $\longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2} \longleftarrow$

DOMINIO $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2y^2+1}+1}{\sqrt{x^2y^2+1}+1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2+\cancel{1}-\cancel{1}}{(x^2+y^2)\underbrace{\left(\sqrt{x^2y^2+1}+1\right)}_{\to 2}}$$

SU $x=0$, IL LIMITE VA A $0 \Rightarrow$ SE IL LIMITE ESISTE SARÀ $=0$

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \le \frac{(x^2+y^2)\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$$

OK

5. $\longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,\frac{\pi}{2})} \frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 y} \longleftarrow$

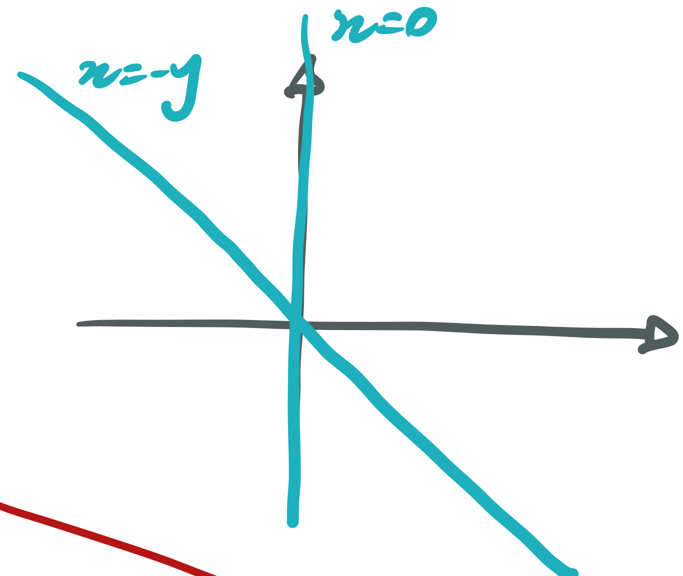
(DOMINIO: DA SOLI)

$$\lim_{(x,y)\to(0,\frac{\pi}{2})} \frac{1}{\underbrace{\sin^2 x}_{\to 0^+} + \underbrace{\cos^2 y}_{\to 0^+}} = +\infty$$

OK

6. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(x+y)}{x^2+y^2}$$

DOMINIO $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$



SU $x=0$

$$f(x,y)\Big|_{x=0} = \frac{\sin^2 y}{y^2} \xrightarrow[y\to 0]{} 1$$

SU $x=-y$

$$f(x,y)\Big|_{x=-y} = \frac{\sin^2 0}{(-y)^2+y^2} = \frac{0}{2y^2} \xrightarrow[y\to 0]{} 0$$

DIVERSI

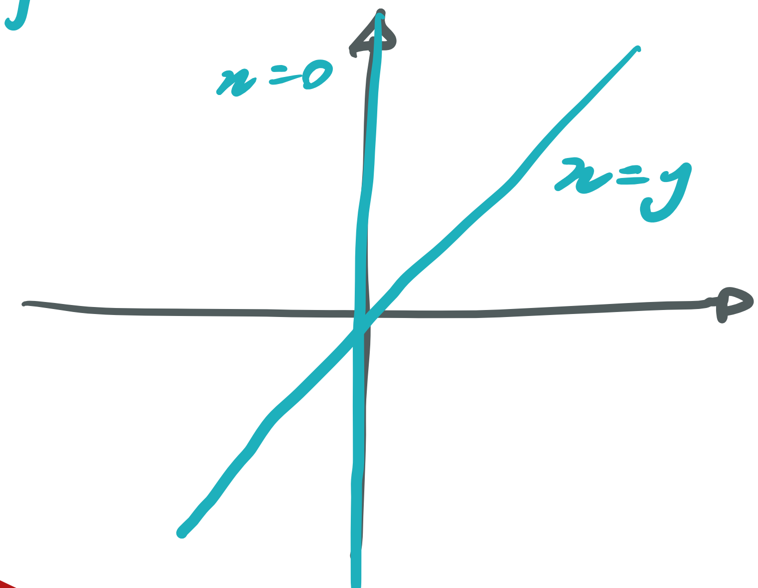
$\Downarrow$

$\nexists$ LIMITE

OK

7. $$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

DOMINIO $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$



SU $x=0$

$$f(x,y)\big|_{x=0} = \frac{0}{y^2} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$$

SU $x=y$

$$f(x,y)\big|_{x=y} = \frac{\cancel{y^2}}{2\cancel{y^2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[y\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

DIVERSI

$\Downarrow$

$\nexists$ LIMITE

OK

8. $\longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} \longleftarrow$

DOMINIO $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^3+y^3}{x^3+y^3} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^3+y^3}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}}_{f(x,y)}$$

SU $x=0$, $f(x,y)\Big|_{x=0} = \frac{y^{\cancel{3}}}{\cancel{y^2}} = y \xrightarrow[y\to 0]{} 0$

SU $y=0$, $x=y$, ANALOGAMENTE $\longrightarrow 0$

SU $y=mx$ $f(x,y)\Big|_{y=mx} = \frac{(1+m^3)x^{\cancel{3}}}{(1+m^2)\cancel{x^2}} = \frac{(1+m^3)x}{1+m^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$$

RIASSUMENDO,

LUNGO OGNI RETTA PASSANTE PER $(0,0)$, IL LIMITE DELLA FUNZIONE RISTRETTO A QUELLA RETTA È 0.

CIÒ BASTA PER DIRE CHE $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$?

NO!

~~UN~~ IL MODO PER SUPERARE QUESTA IMPASSE È PASSARE IN

COORDINATE POLARI

LIMITI IN COORDINATE POLARI

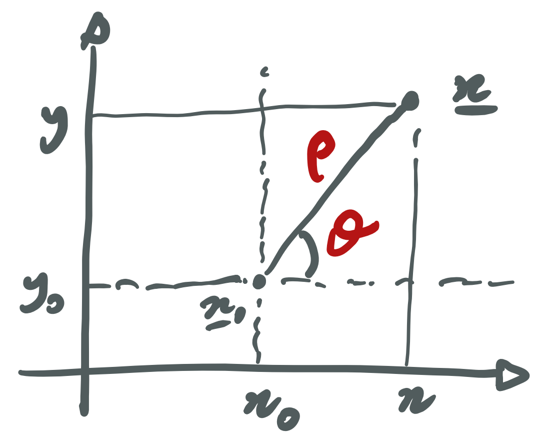
DATO $\underline{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,

OGNI PUNTO $\underline{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ PUÒ ESSERE SCRITTO IN MANIERA UNIVOCA (AD ECCEZIONE DI $\underline{x} = \underline{x}_0$) COME

$$x = x_0 + \rho \cos\theta$$

$$y = y_0 + \rho \sin\theta$$

con $\rho \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$



(ρ, θ) SONO DETTE

COORDINATE POLARI DI $\underline{x}$ CENTRATE IN $\underline{x}_0$

LIMITI IN COORDINATE POLARI

TEOREMA

DATI $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\underline{x}_0$ PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER A,

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\boxed{\lim_{\rho\to 0^+} \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \left| f(x_0+\rho\cos\theta,\, y_0+\rho\sin\theta) - \ell \right| = 0}$$

LIMITI IN COORDINATE POLARI

" $\Downarrow$ " È GARANTITA DAL FATTO CHE SE

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \quad \text{ALLORA}$$

$$\forall \theta \text{ SI HA } \lim_{\rho\to 0^+} \underbrace{f(x_0+\rho\cos\theta,\, y_0+\rho\sin\theta)}_{\varphi(\rho,\theta)} = \ell$$

" $\Uparrow$ " È VERA SE C'È UNIFORMITÀ RISPETTO A θ

CIOÈ SE $\lim_{\rho\to 0^+} \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \varphi(\rho,\theta) = \ell$

(NON BASTA CHE $\forall\theta$ $\lim_{\rho\to 0^+} \varphi(\rho,\theta) = \ell$) OK

LIMITI IN COORDINATE POLARI

ALTRI CASI:

$$(x,y) \to (x_0,y_0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty \iff \lim_{\rho\to 0^+} \inf_{\theta\in[0,2\pi)} f(x_0+\rho\cos\theta, y_0+\rho\sin\theta) = +\infty$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = -\infty \iff \lim_{\rho\to 0^+} \sup_{\theta\in[0,2\pi)} f(x_0+\rho\cos\theta, y_0+\rho\sin\theta) = -\infty$$

LIMITI IN COORDINATE POLARI

ALTRI CASI:

$$(x,y) \to \infty$$

$$\begin{cases} \lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = \ell \iff \lim_{\rho\to+\infty} \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \left| f(x_0+\rho\cos\theta, y_0+\rho\sin\theta) - \ell \right| = 0 \\ \lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = +\infty \iff \lim_{\rho\to+\infty} \inf_{\theta\in[0,2\pi)} f(x_0+\rho\cos\theta, y_0+\rho\sin\theta) = +\infty \\ \lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = -\infty \iff \lim_{\rho\to+\infty} \sup_{\theta\in[0,2\pi)} f(x_0+\rho\cos\theta, y_0+\rho\sin\theta) = -\infty \end{cases}$$

IN QUESTI CASI, LA SCELTA DI (x_0, y_0) È LIBERA

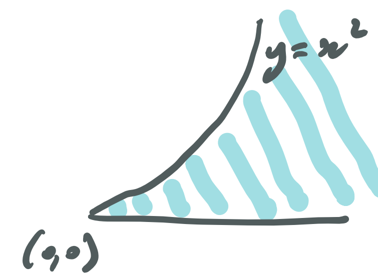
[SPESSO SI SCEGLIE $(x,y)=(0,0)$]

LIMITI IN COORDINATE POLARI

OSSERVAZIONI

- IN GENERALE, θ NON VARIERÀ IN $[0, 2\pi)$ MA IN $A_\rho = \{\theta \in [0, 2\pi) \mid (x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta) \in A\}$

  INSIEME DEGLI ANGOLI θ PER CUI IL PUNTO DI COORD. POLARI (ρ, θ) APPARTIENE AD A



- PRIMA DI PASSARE IN COORD. POLARI È NECESSARIO INDIVIDUARE UN CANDIDATO LIMITE $\ell \in \mathbb{R}$ O $\ell = \pm\infty$

- SPESSO NEGLI ESERCIZI,

  MAGGIOREREMO ANZICHÉ CALCOLARE IL SUP

  MINOREREMO ANZICHÉ CALCOLARE L'INF

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$$

TORNANDO ALL'ESERCIZIO,

VOLEVAMO PROVARE CHE $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$

CIÒ SARÀ VERO SE E SOLTANTO SE

$$\lim_{\rho\to 0^+} \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \left| \frac{(0+\rho\cos\theta)^3+(0+\rho\sin\theta)^3}{(0+\rho\cos\theta)^2+(0+\rho\sin\theta)^2} - 0 \right| = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$$

$$\left| \frac{(0+\rho\cos\theta)^3+(0+\rho\sin\theta)^3}{(0+\rho\cos\theta)^2+(0+\rho\sin\theta)^2} - 0 \right| = \left| \frac{\rho^{\cancel{3}}(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{\cancel{\rho^2}\underbrace{(\cos\theta^2+\sin^2\theta)}_{=1}} \right| \leq$$

$$\leq \rho\,\Big(\underbrace{|\cos^3\theta|}_{\leq 1} + \underbrace{|\sin^3\theta|}_{\leq 1}\Big) \leq 2\rho \xrightarrow[\rho\to 0^+]{} 0$$

$\Longrightarrow$ IL LIMITE ESISTE e VALE 0

OK

ESERCIZI

CALCOLARE I SEGUENTI LIMITI DI FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI:

1. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

2. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^3+y^3}$$

3. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

(DA SOLI) SOLUZIONE: $\nexists$ LIMITE

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

DOMINIO $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

SU $x=0$, $f(x,y)\Big|_{x=0} = \frac{0}{y^2} = 0 \xrightarrow[y\to 0]{} 0$

IL CANDIDATO LIMITE È $\ell = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

$\Updownarrow$

$$\lim_{\rho\to 0^+} \sup_{\theta\in[0,2\pi)} \left| \frac{\rho^{\cancel{3}} \cos\theta \sin^2\theta}{\cancel{\rho^2}\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1}} \right| = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

$$\left|\rho\cos\theta\sin^2\theta\right| = \rho\,\underbrace{|\cos\theta|}_{\leq 1}\,\underbrace{|\sin^2\theta|}_{\leq 1} \leq \rho \xrightarrow[\rho\to 0^+]{} 0$$

$\Rightarrow$ IL LIMITE ESISTE e VALE 0

OK

ESERCIZI

CALCOLARE I SEGUENTI LIMITI DI FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI:

1. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

2. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+5y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

3. $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(y-1)^4}{x^2+y^2+2(1-x-y)}$$

4. $$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{e^{xy}}{(xy)^2}$$

1. $\longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \longleftarrow$

DOMINIO $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

RESTRINGENDO A $y=x$, OTTENGO

$$f(x,y)\Big|_{y=x} = \frac{x^2 \cdot 0}{2x^2} = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$\Rightarrow$ CANDIDATO LIMITE È $\ell = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

PASSO IN COORDINATE POLARI,

$$\left| \frac{\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta\,(\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta)}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta} - 0 \right| =$$

$$= \left| \frac{\rho^{\cancel{4}\,2}\overbrace{\cos\theta\sin\theta}^{\frac{\sin 2\theta}{2}}\overbrace{(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}^{\cos 2\theta}}{\cancel{\rho^2}} \right| = \frac{\rho^2}{2}\left|\underbrace{\sin 2\theta\cos 2\theta}_{\frac{\sin 4\theta}{2}}\right| =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\,(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{\rho^2}{4} \left| \sin 4\theta \right| \le \frac{\rho^2}{4} \xrightarrow[\rho \to 0^+]{} 0$$

$\Longrightarrow$ IL LIMITE ESISTE e VALE 0

OK

2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+5y^2}{(x^2+y^2)^2}$

DOMINIO $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

POTREMMO NOTARE SUBITO CHE

$$\frac{x^2+5y^2}{(x^2+y^2)^2} \geq \frac{\cancel{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{x^2+y^2} \longrightarrow +\infty$$

$\Rightarrow$ IL LIMITE È $+\infty$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+5y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

MA SUPPONIAMO DI NON AVER NOTATO E RESTRINGIAMO A $y=0$. OTTENIAMO QUINDI

$$f(x,y)\Big|_{y=0} = \frac{\cancel{x^2}}{x^{\cancel{4}\,2}} = \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$$

$\Rightarrow$ CANDIDATO LIMITE È $+\infty$

(PASSANDO IN COORD. POLARI DOVRÒ FARE L'INF)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+5y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

PASSO IN COORDINATE POLARI CON $\underline{x}_0 = (0,0)$,

$$\frac{\rho^2\cos^2\theta+5\rho^2\sin^2\theta}{(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)^2} = \frac{\cancel{\rho^2}}{\rho^{\cancel{4}\,2}}\left(\cos^2\theta+5\sin^2\theta\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\Big(\overbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}^{1}+4\underbrace{\sin^2\theta}_{\geq 0}\Big) \geq \frac{1}{\rho^2}\cdot 1 = \frac{1}{\rho^2} \xrightarrow[\rho\to 0^+]{} +\infty$$

OCCHIO!!! DEVO MINORARE!

IL LIMITE ESISTE $\Rightarrow$ E VALE $+\infty$

OK

3. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{(y-1)^4}{x^2+y^2+2(1-x-y)}$

DOMINIO $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$

RESTRINGENDO A $y=1$, OTTENGO

$$f(x,y)\Big|_{y=1} = \frac{0^4}{x^2+1+2(1-x-1)} = \frac{0}{x^2+1-2x} =$$

$$= \frac{0}{(x-1)^2} = 0 \xrightarrow[x\to 1]{} 0$$

$\Rightarrow$ CANDIDATO LIMITE È 0

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(y-1)^4}{x^2+y^2+2(1-x-y)}$$

PASSO IN COORDINATE POLARI CON CENTRO $\underline{x}_0=(1,1)$,

$$x = 1+\rho\cos\theta$$

$$y = 1+\rho\sin\theta$$

$$\left| \frac{(\cancel{1}+\rho\sin\theta-\cancel{1})^4}{1+\rho^2\cos^2\theta+2\rho\cos\theta+1+\rho^2\sin^2\theta+2\rho\sin\theta+ +2(\cancel{1}-\cancel{1}-\rho\cos\theta-1-\rho\sin\theta)} \right| =$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(y-1)^4}{x^2+y^2+2(1-x-y)}$$

$$= \left| \frac{\rho^4 \sin^4\theta}{\cancel{2}+\underbrace{\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{=1} + \cancel{2\rho(\cos\theta+\sin\theta)} \cancel{-2} \cancel{-2\rho(\cos\theta+\sin\theta)}} \right| =$$

$$= \left| \frac{\rho^{\cancel{4}\,2}\sin^4\theta}{\cancel{\rho^2}} \right| = \rho^2 \left|\sin^4\theta\right| \le \rho^2 \xrightarrow[\rho\to 0^+]{} 0$$

$\Longrightarrow$ IL LIMITE ESISTE e VALE 0

OK

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(y-1)^4}{x^2+y^2+2(1-x-y)}$$

P.S. POTREI ARRIVARE A CALCOLARE IL LIMITE ANCHE SENZA PASSARE IN COORD. POLARI, MA DOVREI ESSERE MOLTO BRAVO CON L'ALGEBRA E ACCORGERMI CHE IL DENOMINATORE È IN REALTÀ UGUALE A

$$\boxed{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(y-1)^4}{x^2+y^2+2(1-x-y)}$$

QUINDI,

$$\left|\frac{(y-1)^4}{(x-1)^2+(y-1)^2}\right| = \left|\frac{(y-1)^2(y-1)^2}{(x-1)^2+(y-1)^2}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{(y-1)^2(y-1)^2+\overbrace{(y-1)^2(x-1)^2}^{\text{QUANTITÀ POSITIVA}}}{(x-1)^2+(y-1)^2}\right| = \left|\frac{(y-1)^2\cancel{\left((x-1)^2+(y-1)^2\right)}}{\cancel{(x-1)^2+(y-1)^2}}\right|$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(y-1)^4}{x^2+y^2+2(1-x-y)}$$

QUINDI,

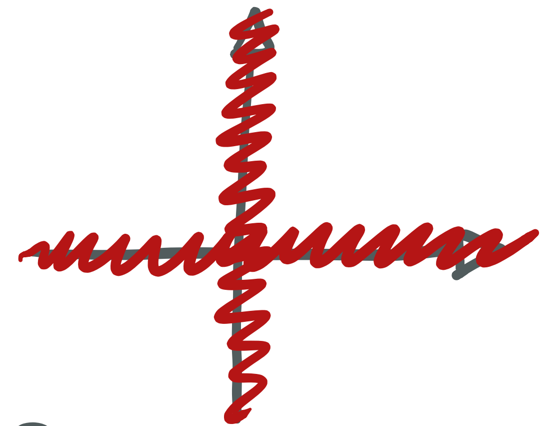
$$\left|\frac{(y-1)^4}{(x-1)^2+(y-1)^2}\right| \le \left|(y-1)^2\right| = (y-1)^2 \xrightarrow[(x,y)\to(1,1)]{} 0$$

$\Rightarrow$ IL LIMITE ESISTE E VALE 0

OK

4. $$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{e^{xy}}{(xy)^2}$$

DOMINIO $\mathbb{R}^2 \setminus \left(\{x=0\} \cup \{y=0\}\right)$



RESTRINGENDO A $y=x$, OTTENGO

$$f(x,y)\Big|_{y=x} = \frac{e^{x^2}}{x^4} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{e^{xy}}{(xy)^2}$$

MA RESTRINGENDO ALL'IPERBOLE $xy = 1$,

OTTENGO

$$f(x,y)\Big|_{y=\frac{1}{x}} = \frac{e^1}{1^2} = e \xrightarrow[x\to+\infty]{} e$$

OTTENGO VALORI DIVERSE $\Rightarrow \nexists$ LIMITE

OK