

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI

(VEDI SEZIONE 11.8 DELLE DISPENSE)

OBIETTIVO: CALCOLARE L'INTEGRALE INDEFINITO

DI UNA QUALSIASI FUNZIONE RAZIONALE,

CIOÈ DI UNA FUNZIONE DEFINITA COME IL

RAPPORTO $\frac{N(x)}{D(x)}$ DI DUE POLINOMI $N(x)$ e $D(x)$

PRIMA DI ADDENTRARCI NELLA SPIEGAZIONE GENERALE

CONSIDERIAMO ALCUNI CASI "SEMPLICI"

SAPPIAMO FACILMENTE INTEGRARE UNA FUNZIONE f SE:

① f è una FUNZIONE POLINOMIALE $f(x) = P(x)$

ESEMPIO: $f(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{3}{2}$

$$\int f(x) dx = \int \left(4x^3 - x^2 + \frac{3}{2} \right) dx \stackrel{\text{LINEARITÀ}}{=} 4 \int x^3 dx - \int x^2 dx + \frac{3}{2} \int 1 dx$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \cancel{4} \cdot \frac{x^4}{\cancel{4}} - \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2} x + C = x^4 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x + C$$

PER $\alpha \neq -1$,

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

OK

SAPPIAMO FACILMENTE INTEGRARE UNA FUNZIONE f SE:

② f è una FUNZIONE RAZIONALE DEL TIPO $\frac{A}{(x-a)^n}$

con a, A COSTANTI

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln |f| + C$$

ESEMPI:

• $\int \frac{2}{x+6} dx = 2 \int \frac{1}{x+6} dx = 2 \ln |x+6| + C$ OK

LINEARITA'

• $\int \frac{1}{(x-2)^3} dx = -\frac{1}{2(x-2)^2} + C$ OK

PER $\alpha \neq -1$,

$$\int f^\alpha \cdot f' dx = \frac{1}{\alpha+1} f^{\alpha+1} + C$$

PROVIAMO AD INTEGRARE UNA FUNZIONE RAZIONALE
UN PO' MENO SEMPLICE

AD ESEMPIO, SIA $f(x) = \frac{3x+1}{x^2-5x+6}$ (ESEMPIO 1
SEZIONE 11.8
DELLE DISPENSE)

IL POLINOMIO A DENOMINATORE x^2-5x+6 E'
FATTORIZZABILE COME $(x-2)(x-3)$, QUINDI

$$f(x) = \frac{3x+1}{x^2-5x+6} = \frac{3x+1}{(x-2)(x-3)}$$

SAREBBE BELLO POTER ESPRIMERE $f(x) = \frac{3x+1}{(x-2)(x-3)}$

NELLA FORMA

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \quad \text{con } A, B \in \mathbb{R}$$

PERCHÉ, IN TAL CASO,

LINEARITÀ

$$\int f(x) dx \stackrel{\downarrow}{=} \int \frac{A}{x-2} dx + \int \frac{B}{x-3} dx$$

E SAPREI CALCOLARE L'INTEGRALE INDEFINITO DI f IN QUANTO

I DUE "PEZZI" $\frac{A}{x-2}$ E $\frac{B}{x-3}$ RICADONO NEL CASO **2** GIÀ DISCUSSO

È POSSIBILE TROVARE $A, B \in \mathbb{R}$ TALI CHE

$$\frac{3x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

? PROVIAMOCI!
 (spoiler: è POSSIBILE!)

AVREI CHE

$$\frac{3x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \stackrel{\substack{\text{DENOMINATORE} \\ \text{COMUNE}}}{\downarrow} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

QUINDI, DOVREBBE ESSERE CHE

$$3x+1 = A(x-3) + B(x-2)$$

$$3x+1 = A(x-3) + B(x-2)$$

$$3x+1 = Ax - 3A + Bx - 2B$$

$$(3-A-B)x + (3A+2B+1) = 0$$

$$\begin{cases} 3-A-B=0 \\ 3A+2B+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3-B \\ 3A+2B+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=3-B \\ 3(3-B)+2B+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=3-B \\ B=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-7 \\ B=10 \end{cases}$$

HO OTTENUTO CHE

$$f(x) = -\frac{7}{x-2} + \frac{10}{x-3}$$

QUINDI,

$$\int f(x) dx = \int \frac{-7}{x-2} dx + \int \frac{10}{x-3} dx$$

2

$$= -7 \ln |x-2| + 10 \ln |x-3| + C$$

OK

AFFRONTIAMO ORA IL CASO GENERALE IN CUI

f è UNA QUALSIASI FUNZIONE RAZIONALE

$$\frac{N(z)}{D(z)} \text{ con } N(z) \text{ e } D(z) \text{ POLINOMI}$$

STEP 0 POSSIAMO SEMPRE SUPPORRE CHE $D(z)$

ABBIA COEFFICIENTE a DEL TERMINE DI GRADO MASSIMO
UGUALE A 1 (CIOÈ, $D(z)$ SIA MONICO)

SE COSÌ NON FOSSE, $D_1(z) := \frac{D(z)}{a} \quad N_1(z) := \frac{N(z)}{a}$

$$\frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(z)}{a D_1(z)} = \frac{N_1(z)}{D_1(z)}$$

MI SONO RICONDOTTO AL CASO IN
CUI IL DENOMINATORE È MONICO

STEP 1

POSSIAMO SEMPRE RISCRIVERE f NELLA FORMA

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

DOVE:

- $Q(x), R(x)$ SONO I POLINOMI RISPETTIVAMENTE OTTENUTI COME QUOZIENTE E RESTO DELLA DIVISIONE EUCLIDEA TRA $N(x)$ E $D(x)$
- $R(x)$ HA GRADO INFERIORE A QUELLO DI $D(x)$

POSSO QUINDI "SPEZZARE" L'INTEGRALE COME

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx$$

GRAZIE A ①, SAPPIAMO CALCOLARE $\int Q(x) dx$

CONCENTRIAMOCI QUINDI SUL CALCOLO DI $\int \frac{R(x)}{D(x)} dx$

RICORDANDOCI CHE $R(x)$ e $D(x)$ SONO DUE POLINOMI TALI CHE:

- $D(x)$ è MONICO
- IL GRADO DI $R(x)$ è INFERIORE RISPETTO A QUELLO DI $D(x)$

STEP 2

SCOMPONIAMO $D(x)$ IN FATTORI IRRIDUCIBILI OTTENENDO

$$D(x) = (x - a_1)^{r_1} \cdot (x - a_2)^{r_2} \cdot \dots \cdot (x - a_m)^{r_m} \cdot$$

$$\cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1} \cdot (x^2 + p_2 x + q_2)^{s_2} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_m x + q_m)^{s_m}$$

con $a_i, p_i, q_i \in \mathbb{R}$ e $r_i, s_i \in \mathbb{N}$

ALLORA,

(SI PUO' DIMOSTRARE CHE) ESISTONO $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$ TALI CHE

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{D(x)} = & \frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1r_1}}{(x-a_1)^{r_1}} + \dots + \\ & + \frac{A_{m1}}{x-a_m} + \frac{A_{m2}}{(x-a_m)^2} + \dots + \frac{A_{mr_m}}{(x-a_m)^{r_m}} + \\ & + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{B_{1s_1}x + C_{1s_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}} + \\ & + \dots + \frac{B_{ms_m}x + C_{ms_m}}{(x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}} \end{aligned}$$

GRAZIE ALLA LINEARITA', POSSO CALCOLARE L'INTEGRALE INDEFINITO DI $\frac{R(x)}{D(x)}$ "SPEZZANDOLO" IN PEZZI DEL TIPO:

- $\frac{A}{(x-a)^n}$ $\leftarrow$ CHE SAPPIAMO INTEGRARE (CASO ②)
- $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ $\leftarrow$ CHE VEDREMO ORA COME INTEGRARE

STEP 3

CALCOLIAMO L'INTEGRALE INDEFINITO DI

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n}$$

con $A, B, p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
 e $x^2 + px + q$ **IRRIDUCIBILE**
 (cioè, PRIVO DI RADICI REALI)

CI CONCENTREREMO SUL CASO $n=1$

(PER I CURIOSI, IL CASO $n > 1$ È DISCUSO NELLE NOTE)

POSSO RISCRIVERE

$$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q} = \frac{A}{2} \frac{2x + p}{x^2 + px + q} + \frac{B - \frac{Ap}{2}}{x^2 + px + q}$$

QUESTO PEZZO È FACILMENTE INTEGRABILE IN QUANTO

DELLA FORMA $\frac{\#'}{\#}$. $\int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx = \ln(x^2 + px + q) + C$

CONCENTRIAMOCI QUINDI SU QUESTO PEZZO

POSSO RISCRIVERE

COMPLETAMENTO DEL QUADRATO

$$\frac{B - \frac{AP}{2}}{x^2 + px + q} = \frac{B - \frac{AP}{2}}{x^2 + px + q + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4}} = \frac{B - \frac{AP}{2}}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}$$

(VOGLIO ARRIVARE A UNA FORMA DEL TIPO $\frac{\#'}{1 + \#'^2}$)

$$= \frac{B - \frac{AP}{2}}{\left(q - \frac{p^2}{4}\right) \left(1 + \frac{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}{q - \frac{p^2}{4}}\right)} = \frac{B - \frac{AP}{2}}{\left(q - \frac{p^2}{4}\right) \left(1 + \frac{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}^2}\right)}$$

RACCOLGO $q - \frac{p^2}{4}$

$\#'$

$$\frac{B - \frac{AP}{2}}{x^2 + px + q}$$

MOLTIPLICO
E DIVIDO
PER $\#'$

↓
=

$$\frac{2 \cdot \left(B - \frac{AP}{2} \right)}{2 \cdot \left(q - \frac{p^2}{4} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}}$$

QUESTA È
UNA COSTANTE

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}}{1 + \left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \right)^2} \quad \begin{matrix} \#' \\ 1 + \#'^2 \end{matrix}$$

QUINDI,

$$\int \frac{B - \frac{AP}{2}}{x^2 + px + q} dx = \frac{2B - AP}{\sqrt{4q - p^2}} \int \frac{\#'}{1 + \#'^2} dx$$

$$\int \frac{\#'}{1+\#^2} dx = \arctan \# + c$$

$$\int \frac{B - \frac{Ap}{2}}{x^2 + px + q} dx = \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot \arctan \# + c$$

$$= \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot \arctan \left(\frac{2 \cdot \left(x + \frac{p}{2}\right)}{2 \cdot \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \right) + c$$

$$= \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot \arctan \left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} \right) + c$$

OK

ESEMPI / ESERCIZI (2, 3 SEZIONE 11.8 DELLE DISPENSE)

CALCOLARE I SEGUENTI INTEGRALI INDEFINITI:

- $$\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$$

- $$\int \frac{x}{1 + x^3} dx$$

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$$

IL DENOMINATORE È GIÀ MONICO, PROCEDO QUINDI CON LA DIVISIONE EUCLIDEA TRA NUMERATORE E DENOMINATORE

$$\begin{array}{r|l}
 \overbrace{x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1}^{N(x)} & \overbrace{x^3 - x^2 + x - 1}^{D(x)} \\
 \hline
 x^4 - x^3 + x^2 - x & \\
 \hline
 // \quad x^3 - x^2 + x + 1 & \\
 x^3 - x^2 + x - 1 & \\
 \hline
 // \quad // \quad // \quad +2 & \\
 & \underbrace{\quad}_{R(x)}
 \end{array}$$

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$



$$\frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} = x + 1 + \frac{2}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$$

$$\frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} = x + 1 + \frac{2}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

CONCENTRIAMOCI SU
QUESTO PEZZO

SCOMPONIAMO IN FATTORI IRRIDUCIBILI $D(x)$

$$D(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x - 1) + x - 1 =$$

$$= (x - 1)(x^2 + 1)$$

$\Delta < 0$ quindi IRRIDUCIBILE

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$$

QUINDI,

$$\frac{2}{x^3 - x^2 + x + 1} = \frac{2}{(x - 1)(x^2 + 1)}$$

ORA DEVO TROVARE $A, B, C \in \mathbb{R}$ TALI CHE:

$$\frac{2}{(x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$$

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Leftrightarrow \frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow 2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) \Leftrightarrow (A+B)x^2 + (C-B)x + A-C-2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C-B=0 \\ A-C-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ C=B \\ -B-B-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ C=-1 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$$

QUINDI,

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \boxed{\frac{1}{x-1}} - \boxed{\frac{x+1}{x^2+1}}$$

CONCENTRIAMOCI SU
QUESTO PEZZO

$$\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot (x+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \boxed{\frac{2x}{x^2+1}} + \boxed{\frac{1}{x^2+1}}$$

"
#

FACCIO IN
MODO DI FAR
COMPARIRE
A NUMERATORE

è DELLA
FORMA $\frac{\#'}{\#}$

DELLA FORMA
 $\frac{\#'}{1 + \#^2}$

$$\rightarrow \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx \leftarrow$$

METTENDO TUTTO INSIEME,

$$\frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} = x + 1 + \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{1}{1 + x^2}$$

QUINDI, $\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx =$

$$= \int (x + 1) dx + \int \frac{1}{x - 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx - \int \frac{1}{1 + x^2} dx$$

$\uparrow$
 $\textcircled{1}$
 $\uparrow$
 $\textcircled{2}$
 $\uparrow$
 $\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}^2 + 1}$
 $\uparrow$
 $\frac{\cancel{x}}{1 + \cancel{x}^2}$

$$\rightarrow \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx \leftarrow$$

QUINDI,

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx = \int (x+1) dx + \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

↑
①
↑
②
↑
#'/#
↑
#'/
1+#²

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \arctan x + c$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} - \arctan x + c$$

OK

$$\rightarrow \int \frac{x}{1+x^3} dx \leftarrow$$

IL DENOMINATORE È MONICO E HA GRADO INFERIORE AL NUMERATORE, DECOMpono QUINDI $D(x)$ IN FATTORI IRRIDUCIBILI

$$D(x) = (x+1)(x^2-x+1)$$

↳ $\Delta < 0$ quindi IRRIDUCIBILE

DEVO TROVARE $A, B, C \in \mathbb{R}$ TALI CHE

$$\frac{x}{1+x^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$\rightarrow \int \frac{x}{1+x^3} dx \leftarrow$$

$$\frac{x}{1+x^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{1+x^3} = \frac{A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)}{1+x^3}$$

$$\Rightarrow x = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1) \Rightarrow (A+B)x^2 + (B+C-A-1)x + A+C = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ B+C-A-1=0 \\ A+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ -A-A-A-1=0 \\ C=-A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=\frac{1}{3} \\ A=-\frac{1}{3} \\ C=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\int \frac{z}{1+z^3} dz$$

QUINDI,

$$\frac{z}{1+z^3} = \frac{-\frac{1}{3}}{z+1} + \frac{1}{3} \frac{z+1}{z^2-z+1}$$

2

CONCENTRIAMOCI SU QUESTO PEZZO

$$\frac{z+1}{z^2-z+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot (z+1)}{z^2-z+1} = \frac{1}{2} \frac{2z+2+1-1}{z^2-z+1} = \frac{1}{2} \frac{2z-1}{z^2-z+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{z^2-z+1}$$

//
#

FACCIO IN MODO
DI FAR COMPARE
A NUMERATORE

E' DELLA FORMA

#'/#

CONCENTRIAMOCI SU QUESTO PEZZO

$$\int \frac{x}{1+x^3} dx$$

$$\frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{x^2 - x + 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$$

COMPLETIAMO IL QUADRATO

CALCOLO $\frac{3}{4}$ A
DENOMINATORE

$$= \frac{4}{3} \frac{1}{1 + \frac{4}{3} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3} \frac{1}{1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

MOLTIPLICO E
DIVIDO PER #1

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2/\sqrt{3}}{1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\boxed{\frac{2/\sqrt{3}}{1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}}$$

DELLA
FORMA
 $\frac{\#1}{1 + \#2}$

$$\rightarrow \int \frac{x}{1+x^3} dx \leftarrow$$

METTENDO TUTTO INSIEME,

$$\frac{x}{1+x^3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{6} \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2/\sqrt{3}}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

QUINDI,

$$\int \frac{x}{1+x^3} dx =$$

$$= -\frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{6} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{2/\sqrt{3}}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} dx$$

$$\uparrow$$

$$\frac{2}{1}$$

$$\uparrow$$

$$\frac{\#'}{\#}$$

$$\uparrow$$

$$\frac{\#'}{1+\#^2}$$

$$\rightarrow \int \frac{x}{1+x^3} dx \leftarrow$$

QUINDI,

$$\int \frac{x}{1+x^3} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{6} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{2/\sqrt{3}}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} dx$$

$\uparrow$
 $\textcircled{2}$
 $\uparrow$
 $\frac{\#'}{\#}$
 $\uparrow$
 $\frac{\#'}{1+\#^2}$

$$= -\frac{1}{3} \ln |x+1| + \frac{1}{6} \ln (x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

$$= \frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{x^2-x+1}}{|x+1|} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

OK