

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

(VEDI SEZIONE 11.7 DELLE DISPENSE)

DATE DUE FUNZIONI f, g TALI CHE:

- g È FUNZIONE CON DERIVATA CONTINUA DEFINITA SU UN INTERVALLO REALE
- f È FUNZIONE CONTINUA DEFINITA IN UN SOTTOINSIEME DELL'IMMAGINE di g

ALLORA, POSTO $t = g(x)$, SI HA

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(t) dt$$

Ⓘ

INFATTI, DENOTANDO CON F UNA PRIMITIVA DI f , SI HA

$$\int f(t) dt = F(t) + c = F(g(x)) + c = \int f(g(x)) g'(x) dx$$

$\uparrow$ $F' = f$ $\uparrow$ $t = g(x)$ $\uparrow$ $(F(g(x)))' = F'(g(x)) g'(x) = f(g(x)) g'(x)$

□

CONFRONTANDO I DUE MEMBRI DI I

$$\int \underbrace{f(g(x))}_{\substack{'' \\ t}} \underbrace{g'(x) dx}_{\substack{'' \\ dt}} = \int f(t) dt$$

POSSIAMO DEDURRE CHE

$$dt = g'(x) dx$$

SCAMBIANDO DI RUOLO x e t IN $\textcircled{\text{I}}$, OTTENIAMO

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt$$

$\textcircled{\text{II}}$

CON $x = g(t)$.

UNA VOLTA RISOLTO L'INTEGRALE DI DESTRA, PER POTER ESPRIMERE IL RISULTATO IN FUNZIONE DI x DOVREMO SOSTITUIRE t CON $g^{-1}(x)$. PER FARE CIO' SARA' NECESSARIO CHE g SIA INVERTIBILE

ESEMPI / ESERCIZI (1,2,3 SEZIONE 11.7 DELLE DISPENSE)

CALCOLARE I SEGUENTI INTEGRALI INDEFINITI:

- $\int \tan x \, dx$

- $\int \sqrt{9 - x^2} \, dx$

- $\int \frac{2}{1 + e^x} \, dx$

$$\rightarrow \int \tan x \, dx \leftarrow$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

SOSTITUISCO $t = \cos x = g(x)$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{f(g(x)) = \frac{1}{g(x)}} \underbrace{(-\sin x)}_{g'(x)} \, dx = - \int \underbrace{\frac{1}{t}}_{f(t)} \, dt$$

$\uparrow$
 $\uparrow$
 $\textcircled{I}$

IN MANIERA ANCORA PIÙ RAPIDA,

$$t = \cos x \Rightarrow dt = (\cos x)' \, dx \Rightarrow dt = -\sin x \, dx \Rightarrow \boxed{dx = -\frac{dt}{\sin x}}$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int \frac{\cancel{\sin x}}{\cos x} \left(-\frac{dt}{\cancel{\sin x}} \right) = - \int \frac{1}{t} \, dt$$

$$\rightarrow \int \tan x \, dx \leftarrow$$

IN ENTRAMBI I CASI,

$$\int \tan x \, dx = - \int \frac{1}{t} dt = - \ln |t| + c = - \ln |\cos x| + c$$

$$\uparrow$$
$$t = \cos x$$

OK

$$\rightarrow \int \sqrt{9 - x^2} dx \leftarrow$$

so che $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, quindi

$$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$$

volendo sfruttare questa identità, sostituisco

x con $3 \sin t$

$$g(t) = 3 \sin t \Rightarrow f(g(t)) = \sqrt{9 - 9 \sin^2 t} = 3 \sqrt{1 - \sin^2 t} = 3 \cos t$$

$$g'(t) = 3 \cos t$$

$$\rightarrow \int \sqrt{3 - x^2} dx \leftarrow$$

QUINDI,

$$\int \sqrt{3 - x^2} dx \stackrel{\textcircled{\text{II}}}{=} \int \underbrace{f(g(t))}_{3 \cos t} \underbrace{g'(t)}_{3 \cos t} dt =$$

INTEGRAZIONE
PER PARTI

$$= 9 \int \cos^2 t dt = \frac{9}{2} (t + \underbrace{\sin t \cos t}_{\sqrt{1 - \sin^2 t}}) + c =$$

$$t = \arcsin \frac{x}{3}$$

$$\downarrow = \frac{9}{2} \left(\arcsin \frac{x}{3} + \frac{x}{3} \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} \right) + c$$

OK

$$\rightarrow \int \frac{2}{1+e^x} dx \leftarrow$$

$$f(x) = \frac{2}{1+e^x}$$

SOSTITUISCO e^x CON t , CIOE' x CON $\ln t$

$$f(g(t)) = \frac{2}{1+t}$$

$$g(t) = \ln t \Rightarrow$$

$$g'(t) = \frac{1}{t}$$

$$\rightarrow \int \frac{2}{1+e^x} dx \leftarrow$$

QUINDI,

$$\int \frac{2}{1+e^x} dx = \overset{\textcircled{\text{II}}}{\int} \overbrace{\frac{2}{1+t}}^{f(g(t))} \overbrace{\frac{1}{t}}^{g'(t)} dt =$$

$$= 2 \left(\int \frac{1}{t} dt - \int \frac{1}{t+1} dt \right) = \ln \left(\frac{t}{t+1} \right)^2 + C =$$

$$\overset{t=e^x}{\downarrow} = \ln \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2} + C$$

OK