

Dispense di  
MATEMATICA II

M. Romeo

Febbraio 2013



# Indice

<b>1</b>	<b>Funzioni vettoriali e curve nello spazio</b>	<b>1</b>
1.1	Limiti, continuità e derivate di vettori . . . . .	1
1.2	Curve in forma parametrica . . . . .	3
1.3	Terna intrinseca . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Funzioni di più variabili</b>	<b>11</b>
2.1	Limiti e funzioni continue . . . . .	11
2.2	Derivate parziali . . . . .	13
2.3	Funzioni differenziabili . . . . .	15
2.4	Funzioni vettoriali e funzioni composte . . . . .	20
2.5	Derivate successive e formula di Taylor . . . . .	23
2.6	Massimi e minimi relativi . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Spazi metrici</b>	<b>33</b>
3.1	Metrica . . . . .	33
3.2	Convergenza uniforme . . . . .	35
3.3	Teorema delle contrazioni . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Equazioni differenziali</b>	<b>39</b>
4.1	Equazioni del primo ordine . . . . .	39
4.2	Teorema di esistenza e unicità . . . . .	46
4.3	Equazioni differenziali lineari . . . . .	48
4.4	Equazioni omogenee a coefficienti costanti . . . . .	52
4.5	Equazioni non omogenee . . . . .	55
4.6	Sistemi di equazioni differenziali lineari . . . . .	59
4.7	Alcune applicazioni delle equazioni differenziali . . . . .	66
4.7.1	Probabilità di collisione . . . . .	66
4.7.2	Moto di un punto soggetto a forza resistente . . . . .	67
4.7.3	Oscillatore armonico forzato . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Superfici regolari</b>	<b>71</b>
5.1	Equazioni di superfici regolari . . . . .	71
5.2	Curva su una superficie regolare . . . . .	73
5.3	Teorema delle funzioni implicite . . . . .	76
5.4	Superfici in forma implicita . . . . .	79

<b>6</b>	<b>Integrazione delle funzioni di più variabili</b>	<b>81</b>
6.1	Insiemi misurabili . . . . .	81
6.2	Integrali doppi . . . . .	83
6.3	Formule di riduzione per gli integrali doppi . . . . .	86
6.4	Cambiamento di variabili negli integrali doppi . . . . .	90
6.5	Calcolo di aree di superfici . . . . .	97
6.6	Integrali di superficie . . . . .	99
6.7	Integrali tripli . . . . .	100
6.8	Applicazioni degli integrali doppi e tripli . . . . .	105
6.9	Derivazione sotto il segno di integrale . . . . .	110
<b>7</b>	<b>Integrali impropri</b>	<b>113</b>
7.1	Integrali estesi ad intervalli non limitati . . . . .	113
7.2	Integrali di funzioni non limitate . . . . .	120
7.3	Integrali impropri di funzioni di più variabili . . . . .	123
7.4	Esempi di calcolo di integrali impropri . . . . .	125
<b>8</b>	<b>Serie numeriche</b>	<b>127</b>
8.1	Definizioni e operazioni sulle serie . . . . .	127
8.2	Criteri di convergenza . . . . .	130
8.3	Serie alternanti e serie assolutamente convergenti . . . . .	134
<b>9</b>	<b>Serie di funzioni</b>	<b>137</b>
9.1	Convergenza uniforme . . . . .	137
9.2	Serie di potenze . . . . .	141
9.3	Serie di Taylor . . . . .	145

# Capitolo 1

## Funzioni vettoriali e curve nello spazio

### 1.1 Limiti, continuità e derivate di vettori

Una legge che ad ogni numero reale  $t$  nel dominio  $A \subseteq \mathbb{R}$  faccia corrispondere un vettore di  $V_3$ , viene detta *funzione a valori vettoriali* o *funzione vettoriale* di variabile reale in  $V_3$ . Indichiamo con  $\mathbf{v}(t)$  una tale funzione e prendiamo una qualunque base  $\{\mathbf{e}_i\}$  in  $V_3$ . Per ogni  $t \in A$  possiamo scrivere

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^3 v_i(t)\mathbf{e}_i.$$

Poiché le componenti  $v_i(t)$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) individuano univocamente, per ogni  $t$ , il vettore  $\mathbf{v}(t)$  nella base scelta, esse, come funzioni reali della variabile reale  $t$  nel dominio  $A$ , costituiranno le *componenti* della funzione vettoriale stessa in quella base.

Vogliamo estendere alle funzioni vettoriali i concetti di limite, di funzione continua e di derivata. A tale scopo consideriamo la funzione vettoriale  $\mathbf{v}(t)$ , definita nel dominio  $A \subseteq \mathbb{R}$ , a valori in  $V_3$ , ed il vettore  $\mathbf{w} \in V_3$ . Preso un punto  $t_0$  di accumulazione per  $A$  diremo che la funzione  $\mathbf{v}(t)$  converge al vettore  $\mathbf{w}$  per  $t$  che tende a  $t_0$ , se è possibile determinare un intorno di  $t_0$  in  $A$ , escluso al più  $t_0$  in modo tale che per valori di  $t$  in tale intorno, la norma della differenza  $\mathbf{v}(t) - \mathbf{w}$  sia più piccola di un qualunque numero positivo prefissato. In altri termini scriveremo

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{v}(t) = \mathbf{w},$$

se,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{v}(t) - \mathbf{w}\| < \varepsilon$ . Dette  $w_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) le componenti di  $\mathbf{w}$  nella base  $\{\mathbf{e}_i\}$ , si ha

$$\|\mathbf{v}(t) - \mathbf{w}\| = \sqrt{(v_1(t) - w_1)^2 + (v_2(t) - w_2)^2 + (v_3(t) - w_3)^2}.$$

Ne segue che la condizione  $\|\mathbf{v}(t) - \mathbf{w}\| < \varepsilon$  implica che siano soddisfatte contemporaneamente le tre condizioni

$$|v_i(t) - w_i| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, 3.$$

Viceversa, queste ultime condizioni implicano che  $\|\mathbf{v}(t) - \mathbf{w}\| < \sqrt{3}\varepsilon$ , ovvero, che la norma della differenza  $\mathbf{v}(t) - \mathbf{w}$  si può rendere minore di un qualunque numero positivo prefissato. Concludiamo allora che la funzione vettoriale  $\mathbf{v}(t)$  converge, per  $t \rightarrow t_0$ , al vettore  $\mathbf{w}$  se e solo se le funzioni componenti  $v_i(t)$  convergono rispettivamente a  $w_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ), ovvero

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{v}(t) = \mathbf{w} \iff \lim_{t \rightarrow t_0} v_i(t) = w_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Questo risultato ci permette di ricondurre il calcolo del limite di una funzione vettoriale al calcolo del limite delle sue componenti. Di conseguenza, tutti i teoremi e le proprietà sui limiti di funzione si estendono immediatamente alle funzioni vettoriali. In particolare questo vale anche per il limite del prodotto scalare tra due funzioni vettoriali ed il limite del prodotto vettoriale tra due funzioni vettoriali.

Una funzione vettoriale  $\mathbf{v}(t)$  definita nel dominio  $A \subseteq \mathbb{R}$  si dice continua in un punto  $t_0$  di accumulazione per  $A$  se risulta

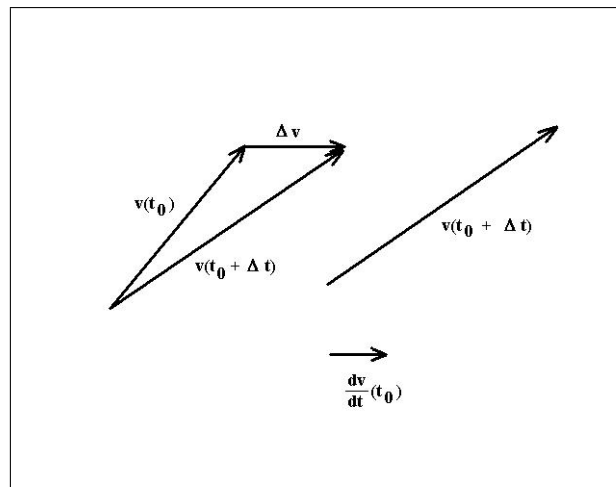
$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0).$$

In forza del risultato precedente sul limite di una funzione vettoriale, possiamo dire che la continuità di  $\mathbf{v}(t)$  in  $t_0$  è equivalente alla continuità delle sue funzioni componenti  $v_i(t)$  in  $t_0$ .

Proprietà analoghe a quelle delle funzioni continue valgono per le funzioni vettoriali. Per esempio, la somma di più funzioni vettoriali continue è una funzione vettoriale continua. Il prodotto scalare tra due funzioni vettoriali continue è una funzione continua ed il prodotto vettoriale tra due funzioni vettoriali continue è una funzione vettoriale continua.

Preso un punto  $t_0$  in  $A$  ed un incremento  $\Delta t$  della variabile  $t$  in modo che  $t_0 + \Delta t \in A$ , consideriamo i vettori  $\mathbf{v}(t_0 + \Delta t)$  e  $\mathbf{v}(t_0)$ . Denotato con  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{v}(t_0)$  l'incremento della funzione vettoriale relativa al punto  $t_0$  e all'incremento  $\Delta t$ , chiamiamo *rapporto incrementale* il vettore

$$\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{v}(t_0)}{\Delta t}.$$



Il rapporto incrementale risulta una funzione vettoriale di  $t$ . Se esiste ed è finito, il limite di questa funzione per  $\Delta t \rightarrow 0$  si dice derivata della funzione vettoriale  $\mathbf{v}(t)$  in  $t_0$  e si scrive

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{v}(t_0)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t_0).$$

Talvolta useremo notazioni analoghe a quelle relative alle funzioni, ovvero  $D\mathbf{v}(t_0)$ , oppure  $\mathbf{v}'(t_0)$ . Considerata una base  $\{\mathbf{e}_i\}$  e usando il risultato precedente sui limiti di funzioni vettoriali, si può

scrivere

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 \frac{v_i(t_0 + \Delta t) - v_i(t_0)}{\Delta t} \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^3 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_i(t_0 + \Delta t) - v_i(t_0)}{\Delta t} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{dv_i}{dt}(t_0) \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

In altri termini, le componenti della derivata di una funzione vettoriale rispetto ad una data base sono le derivate delle funzioni componenti di quel vettore rispetto a quella base.

Anche per le funzioni vettoriali derivabili valgono regole e teoremi analoghi a quelli delle funzioni reali ordinarie derivabili. Ci limitiamo ad osservare che una funzione vettoriale derivabile risulta continua. Estenderemo poi alle funzioni vettoriali la notazione per gli insiemi di funzioni con derivate continue. Per esempio, la notazione  $\mathbf{v}(t) \in C^k(A)$  indica che la funzione vettoriale  $\mathbf{v}(t)$  ha derivate continue fino all'ordine  $k$  nel dominio  $A$ , ovvero, le sue componenti sono funzioni appartenenti a  $C^k(A)$ . Si possono poi dimostrare facilmente le seguenti regole di derivazione

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] &= \frac{d}{dt} \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) \\ \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] &= \frac{d}{dt} \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) \\ \frac{d}{dx} \mathbf{u}(t(x)) &= \frac{d}{dt} \mathbf{u}(t(x)) t'(x). \end{aligned}$$

## 1.2 Curve in forma parametrica

Le equazioni in forma parametrica della retta passante per  $P_0$  e diretta secondo il vettore  $\mathbf{v}$ ,

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y \\ z = z_0 + tv_z, \end{cases}$$

sono un esempio di curva nello spazio espressa mediante funzioni di un parametro reale. Più in generale, data una curva  $\mathcal{C}$  nello spazio ed un riferimento cartesiano con origine in  $O$ , supponiamo che sia possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i punti  $P$  di  $\mathcal{C}$  ed i valori di un parametro  $t$  in un intervallo reale  $[a, b]$ . Si può esprimere allora il vettore  $\vec{OP}$  come funzione del parametro  $t$ , ovvero si può introdurre una funzione vettoriale  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  tale che

$$\vec{OP} = (O, \hat{\mathbf{x}}(t)).$$

Le componenti del vettore posizione  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(t)$  sono le coordinate del punto  $P$  nel riferimento adottato e risultano funzioni di  $t$  definite in  $[a, b]$ . In altri termini, si può scrivere

$$\begin{cases} x = \hat{x}(t) \\ y = \hat{y}(t) \\ z = \hat{z}(t) \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

che rappresentano le equazioni parametriche della curva  $\mathcal{C}$ .

- Esempi

---

1) Le equazioni dell'elica cilindrica di raggio  $R$ , asse  $z$  e passo  $p$ , si possono scrivere in forma parametrica usando come parametro la coordinata cilindrica  $\psi$ . Si ha infatti

$$\begin{cases} x = R \cos \psi \\ y = R \sin \psi \\ z = \frac{p}{2\pi} \psi, \end{cases} \quad \psi \in \mathbb{R}.$$

2) Analogamente le equazioni di una circonferenza di raggio  $R$  e centro nell'origine, sul piano  $\psi = \pi/2$ , in coordinate sferiche, si possono esprimere in forma parametrica usando come parametro la coordinata sferica  $\theta$ . Si ha

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = R \sin \theta \\ z = R \cos \theta, \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi)$$


---

Sia  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(t)$  l'equazione parametrica di una curva  $\mathcal{C}$  definita in  $[a, b]$ . Supponiamo che  $\hat{\mathbf{x}}(t) \in C^1([a, b])$ . Supponiamo inoltre che  $\|\mathbf{dx}/dt\| \neq 0$ ,  $\forall t \in [a, b]$  e che  $\nexists t_1, t_2$  con  $t_1 \neq t_2 : \hat{\mathbf{x}}(t_1) = \hat{\mathbf{x}}(t_2)$  in tutto  $[a, b]$ . Sotto queste condizioni si dice che  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(t)$  è una rappresentazione parametrica *regolare* della curva  $\mathcal{C}$ . Una curva che ammette almeno una rappresentazione parametrica regolare si dice *regolare*. Dalla definizione segue che nelle equazioni parametriche di una curva regolare le funzioni  $\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t)$  hanno derivate prime continue in  $[a, b]$  che non si annullano mai contemporaneamente in  $[a, b]$  e, al variare di  $t$  in  $[a, b]$ , la curva non passa per un dato punto più di una volta.

- Esempio

---

I due sistemi

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \quad \begin{cases} x = x_0 + at^3 \\ y = y_0 + bt^3 \\ z = z_0 + ct^3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

rappresentano la stessa retta, in quanto, eliminando il parametro  $t$ , da ambedue i sistemi si ottengono le medesime equazioni cartesiane

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Tuttavia solo il primo sistema è una rappresentazione regolare della retta. Infatti, per il secondo sistema si ha  $\|\mathbf{x}'(t)\| = 0$  per  $t = 0$ .

---

Di una curva regolare è possibile definire una lunghezza. A questo scopo consideriamo una partizione  $P_n$  dell'intervallo  $[a, b]$  in  $n$  parti prendendo  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  e siano  $\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1), \dots, \mathbf{x}(t_n)$

i corrispondenti vettori posizione dei punti sulla curva  $\mathcal{C}$ . Congiungendo gli estremi di questi vettori otterremo una spezzata di lunghezza

$$\begin{aligned} L(P_n) &= \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})\| \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2 + [z(t_i) - z(t_{i-1})]^2}. \end{aligned}$$

Poiché le funzioni  $x(t), y(t), z(t)$  sono derivabili, applicando a ciascuna di esse il teorema di Lagrange si potranno trovare tre punti  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  nell'intervallo  $(t_{i-1}, t_i)$  in modo tale che

$$\begin{aligned} x(t_i) - x(t_{i-1}) &= x'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}), \\ y(t_i) - y(t_{i-1}) &= y'(\eta_i)(t_i - t_{i-1}), \\ z(t_i) - z(t_{i-1}) &= z'(\zeta_i)(t_i - t_{i-1}), \end{aligned}$$

Otteniamo così

$$L(P_n) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\eta_i)]^2 + [z'(\zeta_i)]^2}.$$

Posto

$$\begin{aligned} \bar{x}'_i &= \inf\{|x'(t)|, t \in [t_{i-1}, t_i]\}, & \bar{X}'_i &= \sup\{|x'(t)|, t \in [t_{i-1}, t_i]\} \\ \bar{y}'_i &= \inf\{|y'(t)|, t \in [t_{i-1}, t_i]\}, & \bar{Y}'_i &= \sup\{|y'(t)|, t \in [t_{i-1}, t_i]\} \\ \bar{z}'_i &= \inf\{|z'(t)|, t \in [t_{i-1}, t_i]\}, & \bar{Z}'_i &= \sup\{|z'(t)|, t \in [t_{i-1}, t_i]\} \end{aligned}$$

si ha

$$L_m(P_n) \leq L(P_n) \leq L_M(P_n),$$

dove

$$\begin{aligned} L_m(P_n) &= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sqrt{[\bar{x}'_i]^2 + [\bar{y}'_i]^2 + [\bar{z}'_i]^2} \\ L_M(P_n) &= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sqrt{[\bar{X}'_i]^2 + [\bar{Y}'_i]^2 + [\bar{Z}'_i]^2}. \end{aligned}$$

Diremo allora che la curva  $\mathcal{C}$  in  $[a, b]$  è *rettificabile* se

$$\sup_{P_n} [L_m(P_n)] = \inf_{P_n} [L_M(P_n)] = l$$

e chiameremo  $l$  la lunghezza di  $\mathcal{C}$ . Vale il seguente risultato che non dimostriamo.

**Teorema 1.1** *Una curva  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(t)$ , regolare in  $[a, b]$ , è rettificabile.*

L'analisi precedente ci permette di effettuare il calcolo della lunghezza di una curva.

**Teorema 1.2** *Data la curva  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(t)$ , regolare in  $[a, b]$ , la sua lunghezza è data da*

$$l = \int_a^b \sqrt{[\hat{x}'(t)]^2 + [\hat{y}'(t)]^2 + [\hat{z}'(t)]^2} dt.$$

**Dim.** Consideriamo la funzione

$$f(t) = \sqrt{[\hat{x}'(t)]^2 + [\hat{y}'(t)]^2 + [\hat{z}'(t)]^2}.$$

In base alla definizione delle quantità  $L_m(P_n)$  e  $L_M(P_n)$  e indicate con  $s(f, P_n)$  e  $S(f, P_n)$  rispettivamente le somme integrali inferiore e superiore della funzione  $f$  relative alla partizione  $P_n$ , valgono le seguenti disuguaglianze

$$L_m(P_n) \leq s(f, P_n) \leq S(f, P_n) \leq L_M(P_n).$$

Poiché la curva è regolare,  $f(t)$  risulta continua, e quindi integrabile in  $[a, b]$ , ovvero

$$\sup_{P_n} [s(f, P_n)] = \inf_{P_n} [S(f, P_n)] = \int_a^b \sqrt{[\hat{x}'(t)]^2 + [\hat{y}'(t)]^2 + [\hat{z}'(t)]^2} dt.$$

D'altra parte, la curva risulta rettificabile quindi

$$\sup_{P_n} [L_m(P_n)] = \inf_{P_n} [L_M(P_n)] = l,$$

e le precedenti disuguaglianze ci permettono di concludere

$$l = \int_a^b \sqrt{[\hat{x}'(t)]^2 + [\hat{y}'(t)]^2 + [\hat{z}'(t)]^2} dt = \int_a^b \left\| \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} \right\| dt.$$

• **Esempio**

---

Vogliamo calcolare la lunghezza dell'arco di curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t \\ z = \sqrt{3} t \end{cases}$$

relativo all'intervallo  $0 \leq t \leq 1$ .

Si può verificare che tratta di una curva regolare. Si ha

$$\begin{cases} x' = \cos t - t \sin t \\ y' = \sin t + t \cos t \\ z' = \sqrt{3} \end{cases}$$

da cui

$$\left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\| = \sqrt{4 + t^2}.$$

Si ottiene quindi

$$l = \int_0^1 \sqrt{4 + t^2} dt.$$

Questo integrale si può risolvere mediante la sostituzione  $t = 2 \sinh \eta$ , ottenendo

$$l = 4 \int_0^{\sinh^{-1} \frac{1}{2}} \cosh^2 \eta d\eta = 2 \sinh^{-1} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.$$


---

Supponiamo ora di prendere un punto  $P_0$  corrispondente al vettore  $\mathbf{x}_0$  su una curva regolare  $\mathcal{C}$  e di aver scelto il parametro  $t$  nelle sue equazioni parametriche in modo tale che  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . Preso un generico punto  $P$  di  $\mathcal{C}$  corrispondente al generico valore  $t$  del parametro, definiamo *ascissa curvilinea*  $s$  su  $\mathcal{C}$  la quantità

$$s(t) = \pm \int_0^t \left\| \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right\| d\tau,$$

dove vale il segno positivo se si vuole che  $s$  cresca al crescere di  $t$ , mentre vale il segno negativo se si richiede che  $s$  decresca al crescere di  $t$ . In valore assoluto, l'ascissa curvilinea misura la lunghezza dell'arco di curva da  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{x}(t)$ . Nel seguito, se non specificato diversamente, assumeremo che  $s$  cresca al crescere del parametro  $t$ . Per la regolarità della curva, le derivate delle componenti di  $\mathbf{x}(t)$  non si annullano mai contemporaneamente, ovvero  $\|d\mathbf{x}/dt\| \neq 0$ . L'ascissa curvilinea risulta quindi una funzione continua e strettamente monotona di  $t$ . Essa è dunque invertibile, con inversa  $t(s)$  continua. Ne segue che si possono scrivere le equazioni parametriche della curva  $\mathcal{C}$  in funzione di  $s$  come  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(t(s))$ . Quest'ultima risulta sempre essere una rappresentazione regolare in quanto, dalla definizione stessa di ascissa curvilinea

$$\left\| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\| \left| \frac{dt}{ds} \right| = \left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\| \frac{1}{|s'|} = 1 \neq 0.$$

Inoltre, poiché  $s(t)$  è biunivoca, si avrà  $s(t_1) \neq s(t_2)$  per  $t_1 \neq t_2$ , quindi  $\mathbf{x}(s_1) \neq \mathbf{x}(s_2)$  se  $s_1 \neq s_2$  ( $s_1 = s(t_1)$ ,  $s_2 = s(t_2)$ ).

- Esempi

---

1) Consideriamo l'equazione di una retta in forma parametrica

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_x \\ y = y_0 + tv_y \\ z = z_0 + tv_z, \end{cases}$$

Dalla definizione di ascissa curvilinea abbiamo

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} d\tau = \|\mathbf{v}\| t.$$

L'equazione parametrica della medesima retta in funzione della sua ascissa curvilinea è

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{v_x}{\|\mathbf{v}\|} s \\ y = y_0 + \frac{v_y}{\|\mathbf{v}\|} s \\ z = z_0 + \frac{v_z}{\|\mathbf{v}\|} s. \end{cases}$$

In tal caso si verifica subito che la lunghezza del segmento  $\overline{P_0P}$  è proprio  $|s|$ .

2) Consideriamo l'equazione della circonferenza di raggio  $R$  e centro nell'origine, sul piano  $z = 0$  di un riferimento cartesiano. Le equazioni parametriche si possono scrivere nella forma

$$\begin{cases} x = R \cos \psi \\ y = R \sin \psi \end{cases} \quad \psi \in [0, 2\pi).$$

In tal caso si ha

$$s(\psi) = \int_0^\psi R \sqrt{\sin^2 \tau + \cos^2 \tau} \, d\tau = R\psi.$$

che, come è noto, corrisponde, in valore assoluto, alla lunghezza dell'arco di circonferenza di apertura  $\psi$ .

3) Consideriamo le equazioni parametriche dell'elica cilindrica di raggio  $R$ , asse  $z$  e passo  $p$ . Abbiamo visto che si può scrivere

$$\begin{cases} x = R \cos \psi \\ y = R \sin \psi \\ z = \frac{p}{2\pi} \psi, \end{cases} \quad \psi \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo l'ascissa curvilinea. Si ha

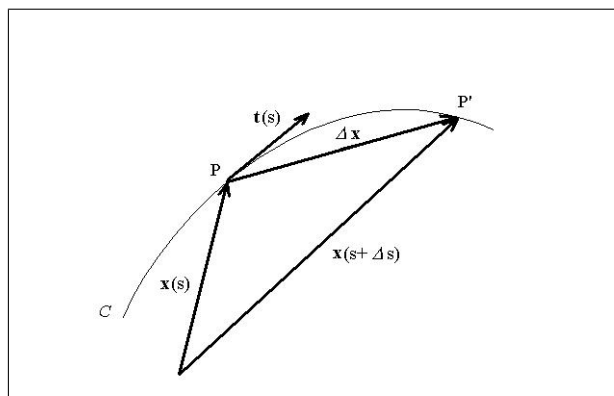
$$s(\psi) = \int_0^\psi \sqrt{R^2 \sin^2 \tau + R^2 \cos^2 \tau + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2} \, d\tau = \sqrt{R^2 + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2} \psi.$$

### 1.3 Terna intrinseca

Siano  $P$  e  $P'$  due punti di una curva regolare  $\mathcal{C}$ , corrispondenti a valori  $s$  e  $s + \Delta s$  dell'ascissa curvilinea. Essi saranno individuati dai vettori  $\mathbf{x}(s)$  e  $\mathbf{x}(s + \Delta s)$ . Al tendere di  $\Delta s$  a zero il vettore

$$\frac{\mathbf{x}(s + \Delta s) - \mathbf{x}(s)}{\Delta s},$$

tende ad assumere la direzione della tangente alla curva nel punto  $P$  di ascissa  $s$ .



Definiamo *versore tangente* alla curva in  $P$  il vettore

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(s + \Delta s) - \mathbf{x}(s)}{\Delta s}.$$

Per verificare che si tratta effettivamente di un versore, osserviamo che, da quanto detto sull'ascissa curvilinea,

$$\left\| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right\| = 1, \quad \implies \quad \|\mathbf{t}(s)\| = 1.$$

Supponiamo ora che la funzione  $\mathbf{x}(t)$  sia derivabile almeno due volte. Derivando ambo i membri dell'identità

$$\mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(s) = 1,$$

ricaviamo

$$2\mathbf{t}(s) \cdot \frac{d\mathbf{t}}{ds} = 0.$$

Se escludiamo il caso in cui la curva sia una retta, cioè supponiamo  $d\mathbf{t}/ds \neq \mathbf{0}$ , la condizione precedente implica che il vettore  $d\mathbf{t}/ds$  risulta ortogonale al versore tangente alla curva in  $P$ . Chiameremo *normale* il versore  $\mathbf{n}$  di  $d\mathbf{t}/ds$ , ovvero, porremo

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = c\mathbf{n},$$

dove la quantità  $c = \|d\mathbf{t}/ds\|$  è detta *curvatura di flessione* della curva. Il suo reciproco  $\rho = 1/c$  si dice *raggio di curvatura*.

Sempre nell'ipotesi che la curva non sia una retta, si definisce versore *binormale* il vettore

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}.$$

I tre versori  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  risultano mutuamente ortogonali e costituiscono la cosiddetta *terna intrinseca* della curva in  $P$ . Ovviamente, al variare del punto  $P$  su  $\mathcal{C}$ , varierà l'orientazione della terna intrinseca.

• Esempi

---

1) Calcoliamo la terna intrinseca e il raggio di curvatura di una circonferenza di raggio  $R$  centro nell'origine, nel piano  $z = 0$  di un riferimento cartesiano. Abbiamo

$$\begin{cases} x = R \cos \psi \\ y = R \sin \psi, \end{cases} \quad s = R\psi \quad \implies \quad \begin{cases} x = R \cos(s/R) \\ y = R \sin(s/R). \end{cases}$$

Il versore tangente è dato da

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = -\sin(s/R)\mathbf{e}_1 + \cos(s/R)\mathbf{e}_2 = -\sin \psi \mathbf{e}_1 + \cos \psi \mathbf{e}_2,$$

da cui

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = -\frac{1}{R} \cos(s/R)\mathbf{e}_1 - \frac{1}{R} \sin(s/R)\mathbf{e}_2.$$

confrontando con la definizione di  $\mathbf{n}$  abbiamo

$$\mathbf{n} = -\cos \psi \mathbf{e}_1 - \sin \psi \mathbf{e}_2, \quad \rho = R.$$

Infine, il versore binormale è

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = (-\sin \psi \mathbf{e}_1 + \cos \psi \mathbf{e}_2) \times (-\cos \psi \mathbf{e}_1 - \sin \psi \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3.$$

2) Calcoliamo la terna intrinseca e la curvatura di flessione dell'elica cilindrica di asse  $z$ , raggio  $R$  e passo  $p$ . Dai risultati già ottenuti abbiamo

$$\begin{cases} x = R \cos \psi \\ y = R \sin \psi \\ z = \frac{p}{2\pi} \psi, \end{cases} \quad s(\psi) = \sqrt{R^2 + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2} \psi =: \alpha \psi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = R \cos(s/\alpha) \\ y = R \sin(s/\alpha) \\ z = \frac{p}{2\pi} \frac{s}{\alpha}. \end{cases}$$

Si ricava così,

$$\mathbf{t} = -\frac{R}{\alpha} \sin(s/\alpha) \mathbf{e}_1 + \frac{R}{\alpha} \cos(s/\alpha) \mathbf{e}_2 + \frac{p}{2\pi\alpha} \mathbf{e}_3 = \frac{R}{\alpha} (-\sin \psi \mathbf{e}_1 + \cos \psi \mathbf{e}_2 + \frac{p}{2\pi R} \mathbf{e}_3).$$

Derivando ulteriormente si ottiene

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = -\frac{R}{\alpha^2} \cos \psi \mathbf{e}_1 - \frac{R}{\alpha^2} \sin \psi \mathbf{e}_2,$$

da cui si ricava

$$\mathbf{n} = -\cos \psi \mathbf{e}_1 - \sin \psi \mathbf{e}_2, \quad c = \frac{1}{\rho} = \frac{4\pi^2 R}{p^2 + 4\pi^2 R^2}.$$

Infine

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \frac{R}{\alpha} (-\sin \psi \mathbf{e}_1 + \cos \psi \mathbf{e}_2 + \frac{p}{2\pi R} \mathbf{e}_3) \times (-\cos \psi \mathbf{e}_1 - \sin \psi \mathbf{e}_2) \\ &= \left(R^2 + \frac{p^2}{4\pi^2}\right)^{-1/2} \left[\frac{p}{2\pi} (\sin \psi \mathbf{e}_1 - \cos \psi \mathbf{e}_2) + R \mathbf{e}_3\right]. \end{aligned}$$

Osserviamo che il calcolo dei versori della terna intrinseca può essere effettuato anche senza conoscere l'ascissa curvilinea. Infatti, data la rappresentazione regolare  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(s(t))$  della curva  $\mathcal{C}$ , si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{x}'}{s'} = \frac{\mathbf{x}'}{\|\mathbf{x}'\|}, \\ \mathbf{n} &= \frac{\frac{d\mathbf{t}}{ds}}{\left\|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right\|} = \frac{\mathbf{t}'/s'}{\|\mathbf{t}'/s'\|} = \frac{\mathbf{t}'}{\|\mathbf{t}'\|}. \end{aligned}$$

Ne segue anche

$$c = \frac{1}{\rho} = \frac{\|\mathbf{t}'\|}{\|\mathbf{x}'\|}.$$

- Esempio

Calcoliamo il versore tangente della elica conica di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = R\psi \cos \psi \\ y = R\psi \sin \psi \\ z = \frac{p}{2\pi} \psi \end{cases} \quad \psi \in \mathbb{R}.$$

Si ha

$$\mathbf{x}' = (R \cos \psi - R\psi \sin \psi) \mathbf{e}_1 + (R \sin \psi + R\psi \cos \psi) \mathbf{e}_2 + \frac{p}{2\pi} \mathbf{e}_3,$$

da cui

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}'}{\|\mathbf{x}'\|} = \frac{R[(\cos \psi - \psi \sin \psi) \mathbf{e}_1 + (\sin \psi + \psi \cos \psi) \mathbf{e}_2 + \frac{p}{2\pi R} \mathbf{e}_3]}{\sqrt{R^2(1 + \psi^2) + \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2}}.$$

## Capitolo 2

# Funzioni di più variabili

### 2.1 Limiti e funzioni continue

Consideriamo l'insieme  $\mathbb{R}^n$  delle  $n$ -uple ordinate di numeri reali. Introdotta la usuale struttura euclidea in  $\mathbb{R}^n$ , sia  $\{\mathbf{e}_i\}$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) la base ortonormale canonica. Detto  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  un vettore di  $\mathbb{R}^n$ , la sua norma sarà  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ . In analogia con la notazione dei sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$ , diamo le seguenti definizioni.

Si dice *intorno sferico* di centro  $\mathbf{x}_0$  e raggio  $r$  ( $r > 0$ ) l'insieme  $B_r(\mathbf{x}_0)$ , definito da

$$B_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}.$$

Nel caso in cui si escluda da questo il solo punto  $\mathbf{x}_0$  scriveremo

$$B_r^0(\mathbf{x}_0) = B_r(\mathbf{x}_0) \setminus \{\mathbf{x}_0\}.$$

Diremo che l'insieme  $A \subset \mathbb{R}^n$  è un *aperto* di  $\mathbb{R}^n$  se per ogni  $\mathbf{x} \in A$  è possibile trovare un intorno  $B_r(\mathbf{x})$  interamente contenuto in  $A$ . Diremo poi che l'insieme  $C$  è *chiuso* se è il complementare di un aperto. Chiameremo punto di accumulazione per  $A \subset \mathbb{R}^n$  un punto  $\mathbf{x}_0$  tale che, preso un qualunque intorno sferico  $B_r(\mathbf{x}_0)$ , esiste almeno un punto di  $A$  distinto da  $\mathbf{x}_0$  appartenente a  $B_r(\mathbf{x}_0)$ . Diremo che un insieme  $A \subset \mathbb{R}^n$  è *limitato*, se esiste un  $k \in \mathbb{R}^+$  tale che

$$\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \leq k, \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A.$$

Si dice poi *diametro* di un insieme limitato  $A \subset \mathbb{R}^n$ , la quantità

$$\sup_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|.$$

Consideriamo una funzione  $f$  definita in un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  a valori in  $\mathbb{R}$  e sia  $\mathbf{x}_0$  un punto di accumulazione per  $A$ . Diremo che la funzione  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tende al limite  $l$  per  $\mathbf{x}$  che tende a  $\mathbf{x}_0$ , e scriveremo  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = l$  se,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0 : \mathbf{x} \in B_\delta^0(\mathbf{x}_0) \cap A \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - l| < \varepsilon$ . Analogamente diremo che  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = +\infty(-\infty)$  se  $\forall k > 0$ ,  $\exists \delta > 0 : \mathbf{x} \in B_\delta^0(\mathbf{x}_0) \cap A \Rightarrow f(\mathbf{x}) > k (< -k)$ .

- Esempi

---

1) Data la funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$f(\mathbf{x}) = x - 2y, \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

verificare che  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x}) = 0$ . Poiché si ha

$$|x - 2y| \leq |x| + 2|y| \leq 3\sqrt{x^2 + y^2} = 3\|\mathbf{x} - \mathbf{0}\|,$$

ne segue che, fissato un  $\varepsilon > 0$ , scegliendo  $\delta = \varepsilon/3$ , si ha

$$|x - 2y| < \varepsilon, \quad \forall \mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{0}),$$

ed il limite è verificato.

2) Data la funzione  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\sin(x - 2y)}{x - 2y},$$

verificare che  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x}) = 1$ . La funzione è definita in  $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0\}$ , cioè in tutti i punti del piano  $\mathbb{R}^2$  esclusa la retta di equazione  $x - 2y = 0$ . Sappiamo che  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ , ovvero,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0 : 0 < |z| < \sigma \Rightarrow \left| \frac{\sin z}{z} - 1 \right| < \varepsilon.$$

In corrispondenza di  $\sigma$ , per il limite dell'esempio precedente, possiamo trovare un  $\delta > 0$  tale che

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{0}\| < \delta \Rightarrow |x - 2y| < \sigma.$$

Mettendo insieme i due risultati, otteniamo

$$\left| \frac{\sin(x - 2y)}{x - 2y} - 1 \right| < \varepsilon, \quad \forall \mathbf{x} \in B_\delta^0(\mathbf{0}) \cap A.$$

3) Data la funzione  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$f(\mathbf{x}) = \frac{x^3 y}{x^6 + y^2},$$

vogliamo studiare il  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x})$ . La funzione è definita in  $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ . Osserviamo che, presa la restrizione della  $f$  in  $A' = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : y - mx = 0\}$ , essendo  $m \in \mathbb{R}$ , si ha

$$f(\mathbf{x})|_{A'} = \frac{mx^4}{x^2(x^4 + m^2)} = \frac{mx^2}{x^4 + m^2}.$$

Se facciamo tendere  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ , in  $A'$ , otteniamo

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x})|_{A'} = 0.$$

D'altra parte, se prendiamo la restrizione della funzione  $f$  in  $A'' = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : y - x^3 = 0\}$ , otteniamo

$$f(\mathbf{x})|_{A''} = \frac{x^6}{x^6 + x^6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x})|_{A''} = \frac{1}{2}.$$

In definitiva, comunque scegliamo un intorno sferico di  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , in questo intorno la funzione assumerà sempre tutti i valori dell'intervallo  $[0, 1/2]$ . La funzione dunque non ammette limite per  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ .

---

Sia  $f$  definita in un dominio  $A \subset \mathbb{R}^n$  non limitato. Diciamo che la funzione  $f$  tende a  $l$  al tendere di  $\mathbf{x}$  all'infinito e scriveremo  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = l$ , se,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \mathbf{x} \in A, \mathbf{x} \notin B_\delta(\mathbf{0}) \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - l| < \varepsilon$ . Analogamente si definisce il limite infinito per  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ .

• Esempio

Data la funzione  $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$f(\mathbf{x}) = \frac{x + y - z}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\},$$

verifichiamo che  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}) = 0$ . Osserviamo che si ha

$$\left| \frac{x + y - z}{x^2 + y^2 + z^2} \right| \leq \frac{|x| + |y| + |z|}{\|\mathbf{x}\|^2} \leq \frac{3\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{3}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Allora, fissato un  $\varepsilon > 0$ , avremo  $|f(\mathbf{x})| < \varepsilon$ , purchè

$$\frac{3}{\|\mathbf{x}\|} < \varepsilon, \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x}\| > \frac{3}{\varepsilon}.$$

Scelto  $\delta = 3/\varepsilon$ , otteniamo

$$|f(\mathbf{x})| < \varepsilon \quad \text{quando} \quad \mathbf{x} \in A, \mathbf{x} \notin B_\delta(\mathbf{0}).$$

Sia  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathbf{x}_0$  un punto di accumulazione di  $A$ . Diremo che  $f$  è *continua* in  $\mathbf{x}_0$  se esiste il  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$  e si ha

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Si dice che la funzione  $f$  è continua in  $A$  se è continua in ogni punto di  $A$ . Valgono inoltre proprietà analoghe a quelle delle funzioni di una variabile reale. In particolare, la somma ed il prodotto di funzioni continue sono funzioni continue. Valgono inoltre i seguenti teoremi.

**Teorema 2.1** *Se  $f$  è continua in  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  e si ha  $f(\mathbf{x}_0) > 0 (< 0)$ , allora esiste un intorno sferico di  $\mathbf{x}_0$  in ogni punto del quale  $f(\mathbf{x}) > 0 (< 0)$ .*

**Teorema 2.2** *(di Weierstrass) Se  $f$  è continua in un insieme  $A \subset \mathbb{R}^n$  chiuso e limitato, allora  $f$  è limitata (cioè la sua immagine in  $\mathbb{R}$  è un insieme limitato) ed ammette un massimo e un minimo.*

## 2.2 Derivate parziali

Sia  $f$  definita in un aperto  $A \subset \mathbb{R}^n$  e sia  $\mathbf{x}_0$  un punto di accumulazione per  $A$ . Consideriamo un vettore  $\mathbf{v}$  di  $\mathbb{R}^n$ . Chiameremo *retta* passante per  $\mathbf{x}_0$  e di direzione  $\mathbf{v}$ , il luogo dei punti  $r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t, t \in \mathbb{R}\}$ . Consideriamo la restrizione di  $f$  ad  $r$ ,

$$f(\mathbf{x})|_r = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t).$$

Tale restrizione è una funzione della sola variabile reale  $t$ . Se questa restrizione è derivabile in  $t = 0$ , ovvero se esiste il

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t) - f(\mathbf{x}_0)}{t},$$

lo chiameremo *derivata direzionale* di  $f$  nella direzione  $\mathbf{v}$ , in  $\mathbf{x}_0$  e lo indicheremo con  $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0)$ . Se  $\mathbf{v}$  coincide con uno dei versori della base ortonormale canonica,  $\mathbf{e}_k$ , porremo

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) := D_{\mathbf{e}_k}f(\mathbf{x}_0),$$

che chiameremo *derivata parziale* di  $f$  rispetto a  $x_k$ , in  $\mathbf{x}_0$ . Poiché risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(x_1^0, \dots, x_k^0 + t, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)],$$

la derivata parziale di una funzione rispetto alla variabile  $x_k$  è la derivata della funzione che si ottiene da  $f$  fissando tutte le altre variabili e facendo variare solo la  $k$ -esima.

• Esempi

---

1) Calcolare la derivata direzionale della funzione

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \ln(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 - x_4^2,$$

nella direzione  $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(1, 1, -1, 1)$  nel punto  $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0, 1)$ .

Secondo la definizione data avremo

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \left[ \left(1 + \frac{1}{2}t\right)^2 + \left(\frac{1}{2}t\right)^2 \right] + \left(-\frac{1}{2}t\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2}t\right)^2 - (\ln 1 - 1)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + t + \frac{1}{2}t^2\right) - t}{t}$$

da cui

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \left(1 + t + \frac{1}{2}t^2\right)}{t} - 1 = 0$$

2) Data la funzione  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$f(\mathbf{x}) = x \ln(xy^2),$$

si ha  $A = \{(x, y) : x > 0, y \neq 0\}$ . Calcoliamo le sue derivate parziali.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \ln(xy^2) + x \frac{1}{xy^2} y^2 = 1 + \ln(xy^2), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x \frac{1}{xy^2} 2xy = \frac{2x}{y}, \end{aligned}$$

che risultano definite in tutto l'aperto  $A$ .

3) Data la funzione  $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(\mathbf{x}) = xyz - \sin(xz) + ye^{x^2z},$$

si ha  $A = \mathbb{R}^3$ . Calcoliamo le derivate parziali nel punto  $\mathbf{x}_0 = (1, 2, \pi)$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= yz - z \cos(xz) + 2xyz e^{x^2z}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= xz + e^{x^2z} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= xy - x \cos(xz) + x^2 y e^{x^2z}, \end{aligned}$$

che risultano definite in  $A$ . Per  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0) = \pi(3 + 4e^\pi), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0) = \pi + e^\pi, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}_0) = 3 + 2e^\pi.$$

4) Data la funzione  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(\mathbf{x}) = 2\sqrt{xy^3} - \sqrt{x}\sqrt{y},$$

si ha  $A = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ . Calcoliamo le derivate parziali.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(2\sqrt{y^3} - \sqrt{y}) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sqrt{x} \left( 3\sqrt{y} - \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{y^3}} \right) \end{aligned}$$

che risultano definite rispettivamente in  $A \setminus \{x = 0\}$  e  $A \setminus \{y = 0\}$ .

---

## 2.3 Funzioni differenziabili

Sia  $f$  definita in  $A \subset \mathbb{R}^n$  e sia  $\mathbf{x}_0 \in A$ , un punto di accumulazione. Diremo che  $f$  è *differenziabile* in  $\mathbf{x}_0$  se esiste una applicazione lineare  $L_{\mathbf{x}_0}$  da  $\mathbb{R}^n$  in  $\mathbb{R}$  tale che

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - L_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

con  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ . Se  $f$  è differenziabile in ogni punto di  $A$ , diremo che è differenziabile in  $A$ .

Dimostriamo che una funzione differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  ammette derivata direzionale in qualunque direzione individuata da un versore  $\mathbf{v}$  e quindi ammette derivate parziali. Posto  $\mathbf{h} = \mathbf{v}t$  si ha infatti, per la linearità di  $L_{\mathbf{x}_0}$ ,

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t) - f(\mathbf{x}_0) - L_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{v}t)}{\|\mathbf{v}\||t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t) - f(\mathbf{x}_0)}{|t|} - \frac{tL_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{v})}{|t|} \right]$$

da cui otteniamo

$$L_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \quad \Rightarrow \quad D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = L_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{v}).$$

In particolare, se  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_k$ , otteniamo

$$L_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{e}_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0).$$

L'applicazione  $L_{\mathbf{x}_0}$  si dice *differenziale* di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  e la si indica più spesso con  $df(\mathbf{x}_0)$ . I risultati precedenti si scriveranno allora nella forma

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}), \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_k),$$

e indicano che l'applicazione di  $df(\mathbf{x}_0)$  ad un vettore  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  equivale alla norma di  $\mathbf{h}$  per la derivata direzionale di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ . Notiamo che, essendo  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i$ , risulta, per la linearità di  $df(\mathbf{x}_0)$ ,

$$df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) = df(\mathbf{x}_0) \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n v_i df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0).$$

Se  $f$  è una funzione differenziabile in  $\mathbf{x}_0$ , si dice *gradiente* di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ , il vettore

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \mathbf{e}_i.$$

Il differenziale di  $f$  si può esprimere allora come l'applicazione di un prodotto scalare,

$$df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Consideriamo in particolare le funzioni  $f_i$  così definite in  $\mathbb{R}^n$ ,

$$f_1(\mathbf{x}) = x_1, \quad f_2(\mathbf{x}) = x_2, \quad \dots, \quad f_n(\mathbf{x}) = x_n.$$

Poiché ogni funzione  $f_i$  è differenziabile,

$$df_i(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) = \nabla f_i(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) v_j = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} v_j = v_i, \quad (i = 1, \dots, n)$$

Ne segue che, posto in questo caso  $df_i = dx_i$ , e risultando i  $dx_i$  indipendenti da  $\mathbf{x}_0$ ,

$$dx_i(\mathbf{v}) = v_i.$$

Possiamo allora riscrivere il differenziale di una qualunque funzione  $f$  in termini della  $n$ -upla di applicazioni lineari  $dx_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ). Posto  $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ , avremo

$$df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) dx_i(\mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Osservazione. Nel caso  $n = 1$ , la definizione di funzione differenziabile si riduce a quella di derivabilità di una funzione di una variabile reale. In tal caso si ha infatti, per  $h \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - \frac{df}{dx}(x_0)h}{|h|} = 0.$$

da cui segue

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

#### • Esempi

---

1) Rifare il calcolo della derivata direzionale dell'esempio 1) del paragrafo precedente utilizzando il gradiente della funzione.

La funzione è

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \ln(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 - x_4^2.$$

Poiché si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3, \quad \frac{\partial f}{\partial x_4} = -2x_4,$$

il gradiente in  $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0, 1)$  è dato da

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = (2, 0, 0, -2)$$

Ne segue

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}(2, 0, 0, -2)(1, 1, -1, 1)^T = 0$$

2) Dimostrare che, dato il vettore costante  $\bar{\mathbf{x}}$ , il gradiente della funzione  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \bar{\mathbf{x}}$ , definita in  $\mathbb{R}^n$  è dato da  $\bar{\mathbf{x}}$ .

Dalla definizione di differenziale in  $\mathbf{x}_0$  abbiamo

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0.$$

Nel nostro caso otteniamo

$$\frac{|\mathbf{x} \cdot \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0 \cdot \bar{\mathbf{x}} - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = \frac{|(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot [\bar{\mathbf{x}} - \nabla f(\mathbf{x}_0)]|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}$$

Posto  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{v}t$ , dove  $\mathbf{v}$  è un arbitrario versore e traducendo il limite per  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$  nel limite per  $t \rightarrow 0$ , otteniamo

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|\mathbf{v} \cdot [\bar{\mathbf{x}} - \nabla f(\mathbf{x}_0)]|}{\|\mathbf{v}\||t|} = |\mathbf{v} \cdot [\bar{\mathbf{x}} - \nabla f(\mathbf{x}_0)]|.$$

Quest'ultimo risultato vale per ogni scelta del versore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  e per ogni punto  $\mathbf{x}_0$ . Ne segue dunque la tesi.

3) Dimostrare che il gradiente di  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}$ , dove  $\mathbf{A}$  è un operatore lineare indipendente da  $\mathbf{x}$  in  $\mathbb{R}^n$ , è dato da  $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}^T\mathbf{x}$ .

Sempre per la definizione di differenziale, scelto un  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , in questo caso abbiamo

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0.$$

D'altra parte, si può scrivere

$$\begin{aligned} & \frac{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &= \frac{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &= \frac{|(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot [\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}^T\mathbf{x}_0 - \nabla f(\mathbf{x}_0)]|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \end{aligned}$$

Come nel caso precedente poniamo  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{v}t$  e passiamo al limite per  $t \rightarrow 0$ . Otteniamo

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t|\mathbf{v} \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t) + \mathbf{A}^T\mathbf{x}_0 - \nabla f(\mathbf{x}_0)]|}{\|\mathbf{v}\||t|} = |\mathbf{v} \cdot [\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{A}^T\mathbf{x}_0 - \nabla f(\mathbf{x}_0)]|.$$

Questo risultato vale per ogni versore  $\mathbf{v}$  e per ogni punto  $\mathbf{x}_0$ . Ne segue il risultato richiesto.

---

Dimostriamo il seguente importante risultato.

**Teorema 2.3** *Ogni funzione differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  è continua in  $\mathbf{x}_0$ .*

**Dim.** Calcoliamo la differenza  $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$ . Si ha

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Facendo uso della disuguaglianza triangolare, della disuguaglianza di Schwarz e osservando che  $df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ , otteniamo

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| &\leq \left| \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \right| + |\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)| \\ &\leq \left| \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \right| \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \end{aligned}$$

Infine, passando al limite per  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$  e sfruttando la differenziabilità, ricaviamo

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| \leq 0 + \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = 0,$$

da cui segue la continuità di  $f$ .

**Teorema 2.4** *Condizione sufficiente affinché la funzione  $f$  sia differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  è che esista un intorno sferico  $B_r(\mathbf{x}_0)$  in cui  $f$  ammette derivate parziali e che queste siano continue in  $\mathbf{x}_0$ .*

**Dim.** Dimostriamo il teorema nel caso più semplice, quello delle funzioni di due variabili. Sia  $f$  definita in  $A \subset \mathbb{R}^2$  e sia  $\mathbf{x}_0 \in A$ ,  $\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{x}_0) \cap A$ . Posto

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0),$$

supporremo che la funzione abbia derivate parziali continue in  $\mathbf{x}_0$ . Applicando il teorema del valor medio alle due differenze  $f(x, y) - f(x_0, y)$  e  $f(x_0, y) - f(x_0, y_0)$ , rispettivamente negli intorni  $I_x$  di  $x_0$  e  $I_y$  di  $y_0$  (con  $I_x \times I_y \subset B_r(\mathbf{x}_0)$ ), otteniamo

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1, y)(x - x_0), \quad \xi_1 \in I_x, \\ f(x_0, y) - f(x_0, y_0) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \xi_2)(y - y_0), \quad \xi_2 \in I_y. \end{aligned}$$

Poniamo ora

$$N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)(y - y_0),$$

e sostituiamo i risultati precedenti.

$$N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0) \right] (x - x_0) + \left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \xi_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \right] (y - y_0).$$

Si ottiene così, in  $I_x \times I_y$ ,

$$\begin{aligned} |N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)| &\leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0) \right| |x - x_0| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \xi_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \right| |y - y_0| \\ &\leq \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \xi_2) - \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0) \right| \right\} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|. \end{aligned}$$

Per la continuità delle derivate parziali, passando al limite per  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$  si arriva a

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{|N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0.$$

Ne segue la differenziabilità di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ .

La differenziabilità di una funzione di due variabili  $z = f(x, y)$  in un punto  $(x_0, y_0)$ , consente di definire il piano tangente al *grafico* della funzione in  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ . A tale scopo denotiamo con  $\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \subset \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \in A\}$ , il *grafico* della funzione  $f$ . Il punto  $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$  apparterrà a tale grafico. Consideriamo la funzione reale, di due variabili,

$$\phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Posto  $z = \phi(\mathbf{x})$ , si può scrivere

$$z - z_0 = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)(y - y_0).$$

Quest'ultima equazione rappresenta un piano in  $\mathbb{R}^3$ . Tale piano passa per il punto  $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$  ed il versore  $\mathbf{n}$ , ad esso normale, può essere ricavato dal gradiente di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ . Si ha infatti

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0)\mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3}{\sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0)\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)\right]^2 + 1}}$$

Notiamo che, in forza della differenziabilità di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ ,

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0.$$

Ne segue che la differenza  $f(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x})$  è un infinitesimo di ordine superiore a  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$  quando  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ . In analogia al caso della tangente al grafico di una funzione di una variabile reale, questa proprietà corrisponde alla condizione di tangenza del piano  $z = \phi(\mathbf{x})$  al grafico di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ .

• Esempio

---

Verificare che la funzione di due variabili

$$f(x, y) = x^2 + \sin y$$

è differenziabile in  $\mathbf{x}_0 = (1, 0)$  e determinare l'equazione del piano tangente in  $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ . La funzione è definita in tutto  $\mathbb{R}^2$  e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos y.$$

Le derivate parziali sono funzioni continue in tutto  $\mathbb{R}^2$ . Quindi la funzione  $f$  è differenziabile in tutto  $\mathbb{R}^2$ . Poiché si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0) = 1,$$

ed essendo  $f(\mathbf{x}_0) = 1$ , si ottiene l'equazione del piano tangente,

$$z - 1 = 2(x - 1) + y.$$


---

## 2.4 Funzioni vettoriali e funzioni composte

Consideriamo una funzione  $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  che ad  $n$ -uple di numeri reali fa corrispondere  $m$ -uple di numeri reali. È possibile estendere i concetti di limite e di continuità per tali funzioni, in modo perfettamente analogo a quanto fatto per le funzioni vettoriali di una variabile reale. In particolare, denotate con  $f_1, f_2, \dots, f_m$ , le componenti di  $\mathbf{f}$  rispetto alla base canonica in  $\mathbb{R}^m$ , si dimostra facilmente che

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{l} \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = l_i, \quad (i = 1, \dots, m),$$

essendo  $l_i$  le componenti di  $\mathbf{l}$  nella stessa base. Da ciò segue anche che la continuità di  $\mathbf{f}$  in un punto  $\mathbf{x}_0 \in A$ , è equivalente alla continuità delle sue componenti  $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nello stesso punto  $\mathbf{x}_0$ .

Estendiamo ora il concetto di differenziabilità alle funzioni vettoriali di più variabili.

Si dice che  $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0 \in A$  se esiste una applicazione lineare  $L_{\mathbf{x}_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tale che

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - L_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0},$$

dove  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  e dove il limite è ovviamente inteso nel senso della norma di  $\mathbb{R}^m$ . Come prima chiameremo  $L_{\mathbf{x}_0}$  il differenziale di  $\mathbf{f}$  in  $\mathbf{x}_0$  e lo denoteremo con  $d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ . In base alle premesse fatte, il limite precedente è equivalente agli  $m$  limiti

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f_i(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f_i(\mathbf{x}_0) - df_i(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Quindi, una funzione  $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è differenziabile se e solo se lo sono le sue funzioni componenti. Preso un generico versore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  si ha

$$df_i(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) = \nabla f_i(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) v_k.$$

La matrice  $m \times n$  di elementi

$$J_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}$$

si dice matrice *jacobiana* della funzione  $\mathbf{f}$ . Le righe di questa matrice sono costituite dalle componenti dei gradienti delle  $f_i$ .

- Esempio

---

Calcolare la matrice jacobiana della funzione  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , data da

$$f_1(\mathbf{x}) = 2x - 3y$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \sin xy$$

$$f_3(\mathbf{x}) = 2 \cos x - 3 \sin y,$$

nel punto  $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ . Le componenti di  $\mathbf{f}$  sono continue con derivate continue. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= 2, & \frac{\partial f_2}{\partial x} &= y \cos xy, & \frac{\partial f_3}{\partial x} &= -2 \sin x \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= -3, & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= x \cos xy, & \frac{\partial f_3}{\partial y} &= -3 \cos y. \end{aligned}$$

Per  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  si ottiene,

$$J = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo ora due funzioni  $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , e  $\mathbf{g} : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ , con  $\mathbf{f}(A) \subset B$  e sia  $\mathbf{F} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  la funzione composta  $\mathbf{F} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , definita da

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}[\mathbf{f}(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in A.$$

Enunciamo, senza dimostrare, i seguenti risultati.

**Teorema 2.5** *Sia  $\mathbf{f}$  continua in  $\mathbf{x}_0 \in A$  e  $\mathbf{g}$  continua in  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ . Allora la funzione composta  $\mathbf{F} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  è continua in  $\mathbf{x}_0$ .*

**Teorema 2.6** *Sia  $\mathbf{f}$  differenziabile in  $\mathbf{x}_0 \in A$  e  $\mathbf{g}$  differenziabile in  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ . Allora la funzione composta  $\mathbf{F} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  è differenziabile in  $\mathbf{x}_0$  e si ha*

$$d\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = d\mathbf{g}(\mathbf{y}_0) \circ d\mathbf{f}(\mathbf{x}_0).$$

Presi  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ , si ha, per  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, p$ ,

$$df_i(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0)v_k, \quad dg_j(\mathbf{y}_0)(\mathbf{w}) = \sum_{h=1}^m \frac{\partial g_j}{\partial y_h}(\mathbf{y}_0)w_h.$$

Dal teorema 2.6 si ottiene

$$dF_q(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) = \sum_{h=1}^m \frac{\partial g_q}{\partial y_h}(\mathbf{y}_0) \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_h}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0)v_k = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{h=1}^m \frac{\partial g_q}{\partial y_h}(\mathbf{y}_0) \frac{\partial f_h}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0) \right) v_k.$$

Ne segue che la matrice jacobiana della funzione composta  $\mathbf{F}$  è data dal prodotto righe per colonne delle due matrici jacobiane di  $\mathbf{g}$  e di  $\mathbf{f}$ , ovvero

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0) = J_{\mathbf{g}}(\mathbf{y}_0)J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) \quad J_{qk}^{\mathbf{F}} = \sum_{h=1}^m J_{qh}^{\mathbf{g}}J_{hk}^{\mathbf{f}}.$$

Consideriamo il caso particolare di  $\mathbf{f} : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $g : B \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Si ha

$$F(t) = g(f_1(t), f_2(t), f_3(t)), \quad t \in A.$$

Calcoliamo la derivata di  $F$  in  $t_0 \in A$ . Posto  $g = g(x_1, x_2, x_3)$  si ha

$$F'(t_0)dt = dF(t_0) = \left( \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g}{\partial x_k}(\mathbf{f}(t_0)) \frac{df_k}{dt}(t_0) \right) dt.$$

da cui,

$$F'(t_0) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{f}(t_0))f'_1(t_0) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(\mathbf{f}(t_0))f'_2(t_0) + \frac{\partial g}{\partial x_3}(\mathbf{f}(t_0))f'_3(t_0).$$

## • Esempi

1) Calcolare la derivata prima della seguente funzione composta  $F$  mediante la formula precedente e in modo diretto, dopo aver ricavato esplicitamente  $F(t)$ ,

$$F(t) = (g \circ \mathbf{f})(t), \quad \begin{cases} f_1(t) = e^t \\ f_2(t) = \sin t \\ f_3(t) = \arctan t, \end{cases} \quad g(x, y, z) = zy - y \sin x.$$

Si ha

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -y \cos x, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = z - \sin x, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = y.$$

Calcolando queste derivate parziali per  $x = e^t, y = \sin t, z = \arctan t$ , e sostituendo nella formula

$$F'(t) = \frac{\partial g}{\partial x} f_1'(t) + \frac{\partial g}{\partial y} f_2'(t) + \frac{\partial g}{\partial z} f_3'(t),$$

si ottiene

$$F'(t) = \sin t \left( \frac{1}{1+t^2} - e^t \cos e^t \right) + \cos t (\arctan t - \sin e^t).$$

Calcolando direttamente  $F(t)$ , si ha

$$F(t) = g(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) = \arctan t \sin t - \sin t \sin e^t,$$

da cui, derivando, si ottiene il risultato precedente.

2) Calcolare la matrice jacobiana della funzione composta  $\mathbf{F} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ , dove  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sono date da

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x \\ f_2(x, y) = xy, \end{cases} \quad \begin{cases} g_1(x, y) = xe^y \\ g_2(x, y) = ye^x \end{cases}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= 1, & \frac{\partial f_2}{\partial x} &= y, & \frac{\partial f_1}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial f_2}{\partial y} &= x, \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} &= e^y, & \frac{\partial g_2}{\partial x} &= ye^x, & \frac{\partial g_1}{\partial y} &= xe^y, & \frac{\partial g_2}{\partial y} &= e^x. \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(x, xy) = e^{xy}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, xy) = xye^x, \quad \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, xy) = xe^{xy}, \quad \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, xy) = e^x.$$

Ne segue

$$J_{\mathbf{F}} = J_{\mathbf{g}} J_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} e^{xy} & xe^{xy} \\ xye^x & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+xy)e^{xy} & x^2e^{xy} \\ ye^x(1+x) & xe^x \end{pmatrix}.$$

3) Calcolare la matrice jacobiana delle funzioni composte  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$  e  $F_2 = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$  dove  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\mathbf{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  sono date da

$$f(x, y) = x^2 + 2y, \quad \begin{cases} g_1(t) = te^t \\ g_2(t) = \sin 2t \end{cases}.$$

Le derivate sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2, \quad g'_1(t) = (1+t)e^t, \quad g'_2(t) = 2 \cos 2t.$$

Nel primo caso si ha

$$g'_1(x^2 + 2y) = (1 + x^2 + 2y)e^{x^2 + 2y}, \quad g'_2(x^2 + 2y) = 2 \cos(2x^2 + 4y),$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} J_{F_1} &= J_g J_f = \begin{pmatrix} (1 + x^2 + 2y)e^{x^2 + 2y} \\ 2 \cos(2x^2 + 4y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x(1 + x^2 + 2y)e^{x^2 + 2y} & 2(1 + x^2 + 2y)e^{x^2 + 2y} \\ 4x \cos(2x^2 + 4y) & 4 \cos(2x^2 + 4y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nel secondo caso si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(te^t, \sin 2t) = 2te^t, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(te^t, \sin 2t) = 2,$$

da cui

$$J_{F_2} = J_f J_g = \begin{pmatrix} 2te^t & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+t)e^t \\ 2 \cos 2t \end{pmatrix} = 2te^{2t}(1+t) + 4 \cos 2t = F'_2(t).$$

## 2.5 Derivate successive e formula di Taylor

Le derivate parziali prime di una funzione  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  possono essere considerate funzioni nel dominio  $B$  di derivabilità. Se tali funzioni sono derivabili, si potranno calcolare le derivate parziali seconde, e così via si definiscono le derivate parziali terze, quarte, etc. In generale la derivata parziale seconda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

rispetto alle variabili  $x_i, x_j$  può risultare diversa dalla derivata parziale rispetto a  $x_j, x_i$ , cioè quella che si ottiene invertendo l'ordine di derivazione. Per esempio la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

ha derivate parziali seconde in  $x = 0, y = 0$  date da

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = -1, \quad \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = 1.$$

Vale il seguente risultato, che non dimostreremo.

**Teorema 2.7** (di Schwarz). *Data una funzione  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A$  aperto, e dato un punto  $(x_0, y_0) \in A$ , se le derivate parziali seconde*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

*sono definite in un intorno sferico  $B_r[(x_0, y_0)]$  e continue in  $(x_0, y_0)$  allora esse coincidono in  $(x_0, y_0)$ .*

Il teorema di Schwarz si può generalizzare a funzioni di  $n$  variabili di classe  $C^k$  con  $k$  arbitrario. Nell'ambito di validità di questo teorema possiamo calcolare le derivate parziali di ordine superiore al secondo, senza preoccuparci dell'ordine in cui vengono effettuate le derivate stesse.

Consideriamo una funzione  $f \in C^k(A)$ , essendo  $A$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Preso  $\mathbf{x}_0 \in A$ , sia  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$  tale che  $B_{\|\mathbf{w}\|}(\mathbf{x}_0) \subset A$ . Consideriamo la restrizione  $F$  della funzione  $f$  al "segmento"  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{w}, t \in [0, 1]\}$ , ovvero

$$F(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{w}).$$

Questa può essere considerata una funzione composta di  $t$  tramite la  $f$  e la  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{w}$ . Essendo  $f \in C^k(A)$ , sarà  $F \in C^k([0, 1])$ . Sviluppiamo allora la funzione  $F(t)$  nel suo polinomio di Taylor attorno a  $t = 0$ . Si ha

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2}t^2 + \dots + \frac{F^{(k)}(0)}{k!}t^k + R_k(t, 0).$$

In particolare, per  $t = 1$ , abbiamo

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \dots + \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + R_k(1, 0).$$

Osserviamo ora che

$$\begin{aligned} F(0) &= f(\mathbf{x}_0), \\ F'(0) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)w_i, \\ F''(0) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)w_i w_j, \\ &\vdots \\ F^{(k)}(0) &= \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(\mathbf{x}_0)w_{i_1} w_{i_2} \dots w_{i_k}. \end{aligned}$$

Posto  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{w}$ , avremo  $F(1) = f(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{w} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ . Sostituendo nello sviluppo di  $F$  otteniamo

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)(x_i - x_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \\ &+ \dots + \frac{1}{k!} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(\mathbf{x}_0)(x_{i_1} - x_{i_1}^0)(x_{i_2} - x_{i_2}^0) \dots (x_{i_k} - x_{i_k}^0) \\ &+ R_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

Questa espressione rappresenta la formula di Taylor per funzioni di più variabili. Il resto  $R_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  della formula di Taylor si può scrivere nella forma di Lagrange, purchè  $f \in C^{k+1}$ . Poiché si ha

$$R_k(1, 0) = \frac{F^{(k+1)}(\tau)}{(k+1)!}, \quad \text{con } \tau \in [0, 1],$$

si ottiene

$$R_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \frac{1}{(k+1)!} \times \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}=1}^n \frac{\partial^{(k+1)} f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{k+1}}}(\mathbf{x}_0 + \tau \mathbf{w})(x_{i_1} - x_{i_1}^0)(x_{i_2} - x_{i_2}^0) \dots (x_{i_{k+1}} - x_{i_{k+1}}^0).$$

Osserviamo che, per ogni  $i = 1, \dots, n$ , si ha

$$|x_i - x_i^0| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|.$$

Ciò comporta che

$$|R_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)| \leq M_k \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^{k+1},$$

dove

$$M_k = \frac{1}{(k+1)!} \max_{\tau \in [0,1]} \left\{ \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}=1}^n \left| \frac{\partial^{(k+1)} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k+1}}}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{w}\tau) \right| \right\}$$

Ne segue che  $R_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^k$ , ovvero

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{R_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^k} = 0.$$

• Esempio

Scrivere la formula di Taylor per la funzione  $f(x, y) = ye^{xy}$  attorno al punto  $(0, 0)$  fino al terzo ordine. Esplicitamente si ha

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)y^2 \right] + \frac{1}{6} \left[ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0)x^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0, 0)x^2y + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0, 0)xy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0, 0)y^3 \right] + R_3(\mathbf{x}, \mathbf{0}).$$

Le derivate parziali che compaiono nella formula sono date da

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y^2 e^{xy}, & \frac{\partial f}{\partial y} &= (1 + xy)e^{xy}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= y^3 e^{xy}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= (2y + y^2x)e^{xy}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (2x + x^2y)e^{xy}, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &= y^4 e^{xy}, & \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} &= (3y^2 + y^3x)e^{xy}, & \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} &= (2 + 4xy + x^2y^2)e^{xy}, \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} &= (3x^2 + x^3y)e^{xy} \end{aligned}$$

Dopo aver valutato queste derivate in  $(0, 0)$ , otteniamo

$$f(x, y) = y + xy^2 + R_3(\mathbf{x}, \mathbf{0}).$$

Nel seguito sarà utile avere una espressione di tipo vettoriale per la formula di Taylor con  $k = 2$ . Sia  $\mathbf{x}_0 \in A$  e sia  $f \in C^2$ . Per  $k = 2$  possiamo scrivere

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)(x_i - x_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0).$$

Introduciamo la matrice  $H(\mathbf{x}_0)$  i cui elementi sono dati da

$$h_{ij}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0).$$

Si tratta di una matrice  $n \times n$ , detta *hessiana* della funzione  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ . Per il teorema di Schwarz essa è simmetrica. Facendo uso di questa matrice la formula di Taylor si può anche scrivere

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0).$$

dove  $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$  è un operatore lineare simmetrico in  $\mathbb{R}^n$  a cui è associata la matrice hessiana. Ricordiamo infine che  $R_2$  è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$ .

## 2.6 Massimi e minimi relativi

Sia  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $\mathbf{x}_0 \in A$ . Si dice che  $\mathbf{x}_0$  è un punto di *massimo relativo* (*minimo relativo*) per  $f$  se esiste un intorno sferico  $B_\delta(\mathbf{x}_0)$  tale che  $\forall \mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \cap A$  si abbia

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad (f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)).$$

**Teorema 2.8** *Data  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in un punto  $\mathbf{x}_0$  interno ad  $A$ , se  $\mathbf{x}_0$  è un punto di massimo o di minimo relativo, si ha*

$$df(\mathbf{x}_0) = 0.$$

**Dim.** Dobbiamo dimostrare che sotto le ipotesi date, si ha  $df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) = 0$ ,  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ . Supponiamo, per fissare le idee, che  $\mathbf{x}_0$  sia un punto di massimo relativo per  $f$ . Allora  $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$  per ogni  $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \cap A$ . Preso un generico versore  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , consideriamo la funzione

$$F(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}),$$

dove  $t \in \mathbb{R}$  è tale che  $(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \cap A$ . Poiché questa funzione è una restrizione di  $f$  definita in un intorno contenente  $\mathbf{x}_0$ , si avrà  $f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ , quindi  $F(t)$  è una funzione di variabile reale che ammette un massimo relativo in  $t = 0$ . Ne segue che  $F'(0) = 0$ . Essendo

$$F'(0) = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}_0)v_k = df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}),$$

si avrà  $df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) = 0$  per ogni scelta di  $\mathbf{v}$  in  $\mathbb{R}^n$ . La dimostrazione è identica nel caso si supponga che  $\mathbf{x}_0$  sia un punto di minimo relativo.

Coerentemente con la terminologia usata nel caso delle funzioni di una variabile reale, chiameremo punti di *stazionarietà* per  $f$ , tutti i punti per i quali  $df = 0$ . Osserviamo che l'annullarsi del differenziale comporta l'annullarsi del gradiente di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$  e quindi di tutte le derivate parziali prime di  $f$  in  $\mathbf{x}_0$ . Infatti, essendo

$$df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v},$$

si ha

$$df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}, \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

**Teorema 2.9** Sia  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^2$  e sia  $\mathbf{x}_0$  un punto di stazionarietà per  $f$ , interno ad  $A$ . Condizione necessaria affinché  $\mathbf{x}_0$  sia un punto di minimo relativo (massimo relativo) è che la matrice hessiana in  $\mathbf{x}_0$  sia semidefinita positiva (semidefinita negativa).

**Dim.** Essendo  $f \in C^2$ , scriviamo la formula di Taylor per  $k = 2$ .

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0).$$

Poiché  $\mathbf{x}_0$  è un punto di stazionarietà, si ha  $df(\mathbf{x}_0) = 0$ , e di conseguenza, posto  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}$ , dove  $\mathbf{v}$  è un generico versore in  $\mathbb{R}^n$ , avremo

$$f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}\mathbf{v} + R_2(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}, \mathbf{x}_0),$$

dove abbiamo fatto uso della linearità dell'operatore  $\mathbf{H}$ . Supponiamo ora che  $\mathbf{x}_0$  sia un punto di minimo relativo. Esisterà un intorno di  $t = 0$  in cui  $f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0) \geq 0$  e quindi, in quell'intorno

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}\mathbf{v} + 2t^{-2}R_2(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}, \mathbf{x}_0) \geq 0.$$

D'altra parte, si ha

$$0 = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R_2(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}, \mathbf{x}_0)}{t^2},$$

quindi, essendo  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}\mathbf{v}$  indipendente da  $t$ , si ha

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}\mathbf{v} + 2t^{-2}R_2(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}, \mathbf{x}_0)] = \mathbf{v} \cdot \mathbf{H}\mathbf{v}.$$

Questo risultato vale per ogni scelta di  $\mathbf{v}$  quindi  $\mathbf{H}$  è semidefinito positivo, cioè la matrice hessiana in  $\mathbf{x}_0$  è semidefinita positiva. In modo perfettamente analogo si dimostra che se il punto  $\mathbf{x}_0$  è di massimo relativo, allora la matrice hessiana in  $\mathbf{x}_0$  deve essere semidefinita negativa.

Il teorema precedente fornisce solo una condizione necessaria affinché un punto di stazionarietà sia un massimo (o un minimo) relativo. La condizione non è sufficiente. A questo proposito consideriamo il seguente esempio.

Data la funzione

$$f(x, y) = x^2 - y^4,$$

cerchiamo i suoi punti di stazionarietà imponendo l'annullarsi del differenziale, ovvero l'annullarsi delle sue derivate parziali prime.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -4y^3 = 0,$$

da cui ricaviamo  $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ . La matrice hessiana in tale punto è

$$H(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e risulta semidefinita positiva, in quanto  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{0})\mathbf{v} = 2v_1^2 \geq 0$ . La funzione, tuttavia, non possiede un minimo in  $(0, 0)$  perché risulta positiva lungo l'asse delle  $x$  e negativa lungo l'asse delle  $y$ , in un qualunque intorno di  $(0, 0)$ .

**Teorema 2.10** Sia  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$  e sia  $\mathbf{x}_0$  un punto di stazionarietà per  $f$ , interno ad  $A$ . Condizione sufficiente affinché  $\mathbf{x}_0$  sia un punto di minimo relativo (massimo relativo) è che la matrice hessiana in  $\mathbf{x}_0$  sia definita positiva (definita negativa).

**Dim.** Nell'ipotesi  $f \in C^2$ , ed essendo  $\mathbf{x}_0$  di stazionarietà, possiamo scrivere

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0),$$

in un intorno di  $\mathbf{x}_0$  contenuto in  $A$ . Poiché  $H(\mathbf{x}_0)$  è una matrice simmetrica, essa ammetterà  $n$  autovettori ortonormali  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ . Questi autovettori formeranno una base in  $\mathbb{R}^n$  e potremo scrivere

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{e}_i.$$

si ottiene così,

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{H}(\mathbf{x}_0) \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n c_i \lambda^{(i)} \mathbf{e}_i,$$

essendo  $\lambda^{(i)}$  gli autovalori corrispondenti. Moltiplicando scalarmente a sinistra per  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ , otteniamo

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \sum_{i,j=1}^n c_i c_j \lambda^{(i)} \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n \lambda^{(i)} c_i^2.$$

Supponiamo ora che  $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$  sia definito positivo. Allora tutti i suoi autovalori sono positivi. Quindi, preso il più piccolo tra questi, chiamiamolo  $\bar{\lambda}$ , avremo

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \lambda^{(i)} c_i^2 \geq \bar{\lambda} \sum_{i=1}^n c_i^2 = \bar{\lambda} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2.$$

Si ottiene così

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \geq \frac{1}{2} \bar{\lambda} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2 + R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0).$$

Ricordando che  $R_2$  è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$ , fissato un  $\epsilon \leq \frac{1}{2} \bar{\lambda}$ , esisterà un intorno  $B_\delta(\mathbf{x}_0)$  in cui

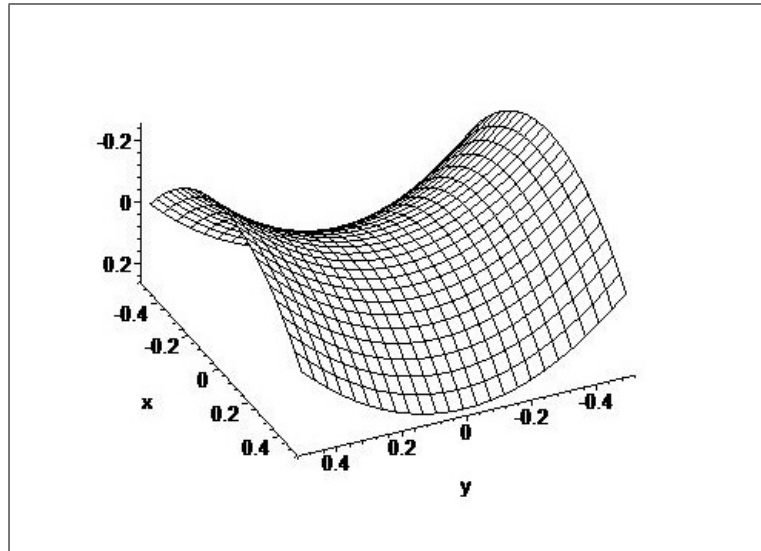
$$-\frac{1}{2} \bar{\lambda} \leq -\epsilon < \frac{R_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} < \epsilon \leq \frac{1}{2} \bar{\lambda},$$

e quindi  $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \geq 0$ ,  $\forall \mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \cap A$ . In modo perfettamente analogo si procede per dimostrare che se nel punto di stazionarietà  $\mathbf{x}_0$  di  $f$  la matrice hessiana è definita negativa, allora  $\mathbf{x}_0$  è un punto di massimo relativo per  $f$ .

I risultati precedenti forniscono un metodo di ricerca dei massimi e dei minimi relativi di una funzione di più variabili. In pratica, bisogna cercare i punti di stazionarietà della funzione e, in tali punti, calcolare la matrice hessiana. Se questa matrice risulta definita abbiamo sicuramente un punto di massimo o di minimo relativo. Se la matrice hessiana non è nè definita nè semidefinita, cioè, come si usa dire, è *non definita*, il punto non è nè di massimo nè di minimo. Nel caso di funzioni di due variabili, un punto in cui la matrice hessiana non è definita si dice punto di *sella*. Si consideri ad esempio la funzione  $f(x, y) = x^2 - y^2$ . Essa ha un unico punto di stazionarietà in  $(0, 0)$  e la sua matrice hessiana in questo punto è

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

che non è definita. Il punto  $(0,0)$  è allora un punto di sella. Esso è caratterizzato dal fatto che la restrizione della  $F$  lungo la retta  $y = 0$  ha un minimo in  $(0,0)$  mentre la restrizione della  $F$  lungo la retta  $x = 0$  ha un massimo in  $(0,0)$  (vedi il grafico della funzione, in figura).



Per stabilire se la matrice hessiana è definita, basta calcolarne gli autovalori. Se questi sono tutti positivi o tutti negativi, la matrice sarà definita rispettivamente, positiva o negativa. Se gli autovalori sono tutti non negativi o tutti non positivi la matrice sarà semidefinita rispettivamente, positiva o negativa. In tutti gli altri casi l'hessiana sarà non definita.

- Esempi

1) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^3 - xy.$$

Determiniamo i punti di stazionarietà, imponendo l'annullarsi delle derivate parziali prime. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - y = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 - x = 0, \end{aligned}$$

da cui si ottengono i due punti di stazionarietà  $\mathbf{x}_1 = (0,0)$ ,  $\mathbf{x}_2 = (1/12, 1/6)$ . La matrice hessiana è

$$H(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6y \end{pmatrix}.$$

si ha, allora

$$H(\mathbf{x}_1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(\mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo gli autovalori di  $H(\mathbf{x}_1)$ . Dall'equazione caratteristica

$$\det(H(\mathbf{x}_1) - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

ricaviamo  $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ ,  $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ . Poiché  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ , ne segue che la matrice  $H(\mathbf{x}_1)$  è non definita, quindi  $\mathbf{x}_1$  è un punto di sella. Determiniamo gli autovalori di  $H(\mathbf{x}_2)$ . Dall'equazione caratteristica

$$\det(H(\mathbf{x}_2) - \lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0,$$

otteniamo,

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ambedue gli autovalori sono positivi quindi la matrice hessiana risulta definita positiva. Il punto  $\mathbf{x}_2$  è allora un punto di minimo relativo per  $f$ .

2) Determinare gli eventuali punti di massimo e di minimo relativo della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz.$$

Impongo le condizioni di stazionarietà

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x + y - z = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4y + x = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 2z - x = 0, \end{aligned}$$

che ammettono la sola soluzione  $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$ . Si ha

$$H(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui si ricava

$$\det(H(\mathbf{0}) - \lambda I) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 18\lambda + 10 = 0.$$

Questa equazione non ammette radici non positive quindi le tre radici saranno necessariamente positive e la funzione avrà in  $(0, 0, 0)$  un punto di minimo relativo.

3) Determinare gli eventuali punti di massimo o di minimo della seguente funzione

$$f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 2xy - x.$$

La condizione di stazionarietà implica

$$\begin{cases} 6x + 2y - 1 = 0 \\ -2y + 2x = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava l'unico punto di stazionarietà

$$\mathbf{x}_0 = \left( \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \right).$$

La matrice hessiana ha elementi costanti e vale

$$H = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

I suoi autovalori sono

$$\lambda_1 = 2 - 2\sqrt{5}, \quad \lambda_2 = 2 + 2\sqrt{5}.$$

L'hessiana è dunque non definita ed il punto trovato è un punto di sella.

---

