

SERIE NUMERICHE

esercizi

R. Argiolas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = ?$$

Questa piccola raccolta di esercizi sulle serie numeriche è rivolta agli studenti del corso di analisi matematica I. E' bene precisare fin da ora che possedere e svolgere gli esercizi di questa dispensa **non è condizione né necessaria né sufficiente per il superamento dell'esame stesso. Questa dispensa non sostituisce il libro di testo adottato, ne sostituisce le esercitazioni svolte dal docente. Questa dispensa è solo di supporto a tutti coloro che vogliano approfondire la loro preparazione all'esame con ulteriori esercizi oltre quelli del libro di testo suggerito dal docente.**

In questa dispensa sono stati raccolti alcuni degli esercizi svolti a lezione e assegnati alle prove scritte, sono quindi esercizi che possono trovarsi in un qualsiasi testo di analisi matematica del primo anno del corso di studi. Lo scopo della dispensa è di fornire una guida per la soluzione degli esercizi.

Ringrazio anticipatamente tutti coloro che vorranno segnalarmi eventuali errori.

R.A.

Richiami

Sia a_n una successione di numeri reali. Si definisce serie di termini a_n la successione s_n così definita:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\dots\dots\dots \\ s_{n-1} &= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \\ s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \end{aligned}$$

L'elemento s_n si chiama somma parziale (o ridotta) n-esima della serie.

Una serie si dirà convergente, divergente o irregolare a seconda che la successione s_n sia convergente, divergente o irregolare. Nel caso la successione converga, il limite di tale successione si dirà somma della serie.

Condizione necessaria (ma non sufficiente) per la convergenza di una serie numerica:

“Affinchè una serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ possa convergere, il termine generale della serie deve tendere a zero, cioè $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ”.

Osservazione

Vengono proposti una serie di esercizi relativi alla condizione necessaria per la convergenza di una serie che sono anche un'occasione per ricordare il calcolo dei limiti di successione. Per un esercizio più approfondito sui limiti di successione si veda anche la dispensa “Successioni”.

Esercizi

65. Assegnata la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{3n^2 + 4}$, verificare se la condizione necessaria è soddisfatta.

soluzione

Verifichiamo prima la presenza di una forma indeterminata, passiamo poi al calcolo del limite mettendo in evidenza a numeratore e denominatore.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3}{3n^2 + 4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{3}{n} \right)}{n^2 \left(3 + \frac{4}{n^2} \right)} = \frac{1}{3}$$

La serie non converge.

66. Assegnata la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-3n^2 - 2n + 6)$, verificare se la condizione necessaria è soddisfatta.

soluzione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-3n^2 - 2n + 6) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(-3 - \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2} \right) = -\infty$$

La condizione necessaria non è soddisfatta quindi la serie assegnata diverge.

67. Assegnata la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-2n^4 - 3n^2 + 5n^3 - 1)$, verificare se la condizione necessaria è soddisfatta.

soluzione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-2n^4 - 3n^2 + 5n^3 - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(-2 - \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^4} \right) = -\infty$$

Anche in questo caso la serie diverge.

68. Assegnata la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (2n^5 - 3n^4 + 5n^3 + 7n^2 - 8n + 4)$, verificare se la condizione necessaria è soddisfatta.

soluzione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^5 - 3n^4 + 5n^3 + 7n^2 - 8n + 4) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^5 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{7}{n^3} - \frac{8}{n^4} + \frac{4}{n^5} \right) = +\infty$$

La condizione necessaria non è verificata quindi la serie diverge.

69. Assegnata la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+3}{n^2+4}$, verificare se la condizione necessaria è soddisfatta.

soluzione

Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+3}{n^2+4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(4 + \frac{3}{n} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{4}{n^2} \right)} = 0$$

Poiché la condizione necessaria è verificata la serie **potrebbe** convergere.

70. Assegnata la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{2n + 1}$, verificare se la condizione necessaria è soddisfatta.

soluzione

Si ha che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 1}{2n + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n \left(2 + \frac{1}{n} \right)} = +\infty$$

La serie diverge.

71. Assegnata la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - 5n + 2}{3n^2 + 4n + 5}$, verificare se la condizione necessaria è soddisfatta.

soluzione

Si ottiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 5n + 2}{3n^2 + 4n + 5} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2} \right)}{n^2 \left(3 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2} \right)} = \frac{1}{3}$$

La serie diverge.

72. Assegnata la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+2)}{n+9}$, verificare se la condizione necessaria è soddisfatta.

soluzione

Si ha che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)}{n+9} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{9}{n} \right)} = +\infty$$

La serie diverge.

73. Assegnata la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-n)(n-3)}{n^2+4}$, verificare se la condizione necessaria è soddisfatta.

soluzione

Si ottiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-n)(n-3)}{n^2+4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(1 - \frac{3}{n} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{4}{n^2} \right)} = -1$$

La serie diverge.

74. Assegnata la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-3}{n^3-4}$, verificare se la condizione necessaria è soddisfatta.

soluzione

Si ottiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-3}{n^3-4} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 - \frac{3}{n} \right)}{n^3 \left(1 - \frac{4}{n^3} \right)} = 0$$

La serie **potrebbe** convergere.

75. Assegnata la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+5}}{n+3}$, verificare se la condizione necessaria è soddisfatta.

soluzione

Si ottiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+5}}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{1 + \frac{5}{n^2}}}{n \left(1 + \frac{3}{n}\right)} = 1$$

La serie diverge.

76. Assegnata la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+5} + \sqrt{n^2+4}}{n+3}$, verificare se la condizione necessaria è soddisfatta.

soluzione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+5} + \sqrt{n^2+4}}{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\sqrt{1 + \frac{5}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{n^2}} \right)}{n \left(1 + \frac{3}{n}\right)} = 2$$

La serie diverge.

77. Assegnata la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{3n+5} + \sqrt{n}}{\sqrt{2n-3}}$, verificare se la condizione necessaria è soddisfatta.

soluzione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n+5} + \sqrt{n}}{\sqrt{2n-3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \left(\sqrt{3 + \frac{5}{n}} + 1 \right)}{\sqrt{n} \sqrt{2 - \frac{3}{n}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$$

La serie diverge.

Le Principali Serie Numeriche

La serie geometrica

La serie geometrica è la seguente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$$

dove il termine “q” si chiama **ragione** della serie.

La somma parziale ennesima (somma dei primi n termini della serie) è data da:

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

Tale somma (che rappresenta la somma dei primi n termini di una progressione geometrica) può essere scritta anche come:

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Si osservi che:

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \begin{cases} \frac{1}{1 - q} & \text{se } |q| < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

pertanto la serie: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ è $\left\{ \begin{array}{ll} \text{convergente con somma } \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ \text{diverge a } +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1 \end{array} \right.$

Grafico della serie geometrica di ragione 1/2:

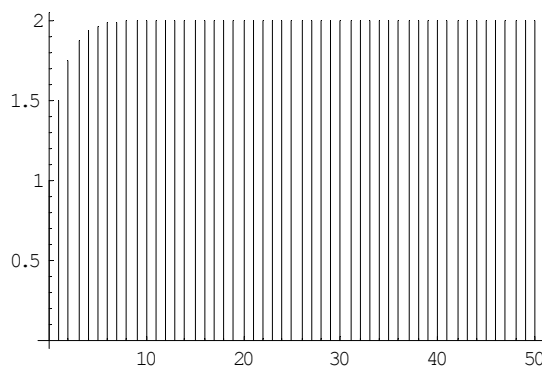


Grafico della serie geometrica con ragione 1:

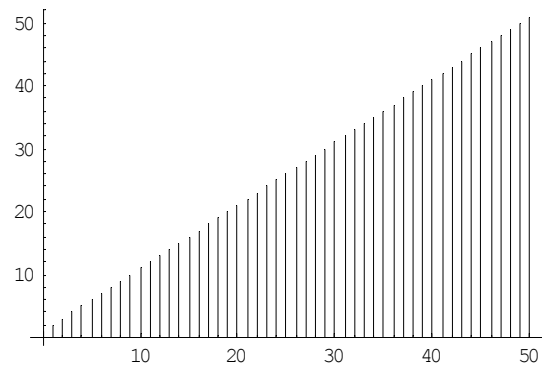
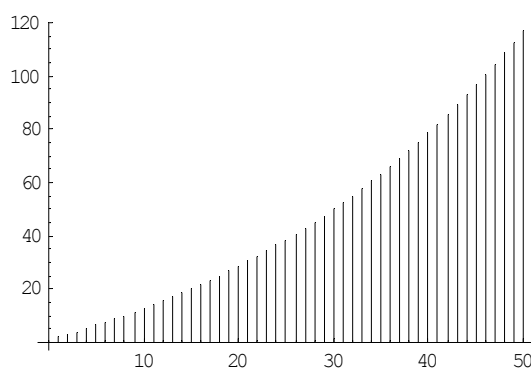


Grafico della serie geometrica con ragione 1,03:

**Esercizi**

78. Studiare la convergenza della serie geometrica: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+3}{x+4} \right)^n$.

Calcolare se è possibile la somma.

Soluzione

Abbiamo stabilito che la serie geometrica converge per tutti quei valori per cui $|q| < 1$, quindi affinché la serie assegnata converga è sufficiente richiedere che:

$$\left| \frac{x+3}{x+4} \right| < 1 \Rightarrow |x+3| < |x+4| \Rightarrow x > -\frac{7}{2} \quad (x \neq -4)$$

Si osservi che anche la condizione necessaria è verificata!
La somma della serie è data da:

$$S = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{x+3}{x+4}} = x+4$$

79. Studiare la convergenza della serie geometrica: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{x-3} \right)^n$.

Calcolare, se è possibile, la sua somma.

Soluzione

Abbiamo stabilito che la serie geometrica converge per tutti quei valori per cui $|q| < 1$, quindi affinché la serie assegnata converga è sufficiente richiedere che:

$$\left| \frac{x-2}{x-3} \right| < 1 \Rightarrow |x-2| < |x-3| \Rightarrow x < \frac{5}{2} \quad (x \neq 3)$$

Si osservi che anche la condizione necessaria è verificata!
La sua somma è data da:

$$S = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{x-2}{x-3}} = 3 - x$$

80. Studiare la convergenza della serie geometrica: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2-2} \right)^n$.

Calcolare, se è possibile, la sua somma.

Soluzione

Affinchè la serie assegnata converga è sufficiente richiedere che:

$$\left| \frac{x^2-1}{x^2-2} \right| < 1 \Rightarrow |x^2-1| < |x^2-2| \Rightarrow -\sqrt{\frac{3}{2}} < x < \sqrt{\frac{3}{2}} \quad (x \neq \pm\sqrt{2})$$

Si osservi che anche la condizione necessaria è verificata!
La sua somma è data da:

$$S = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{x^2-1}{x^2-2}} = 2 - x^2$$

La serie armonica

E' la serie dei reciproci dei numeri naturali, così definita:

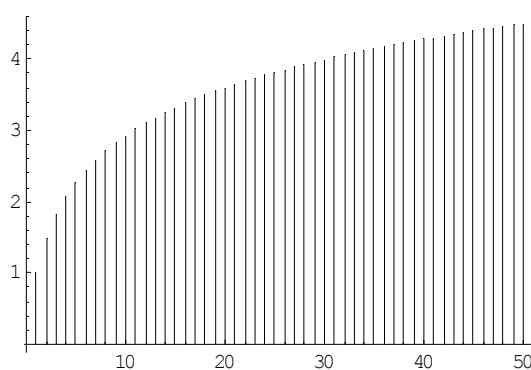
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

La serie armonica è un esempio di serie che **non converge**, benché il termine generale della serie tenda a zero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

(ricordiamo infatti che questa è solo una condizione necessaria ma non sufficiente per la convergenza).

Grafico della serie armonica:



La serie armonica generalizzata

E' definita come:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots \quad \text{dove } p \text{ è un numero reale}$$

La serie armonica generalizzata converge per valori di $p > 1$ e diverge per $p \leq 1$.

Grafico della serie armonica generalizzata con $p=2$:

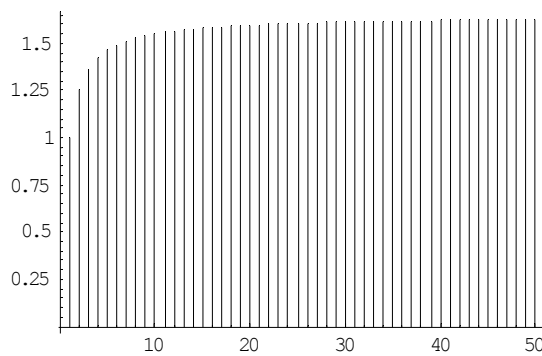
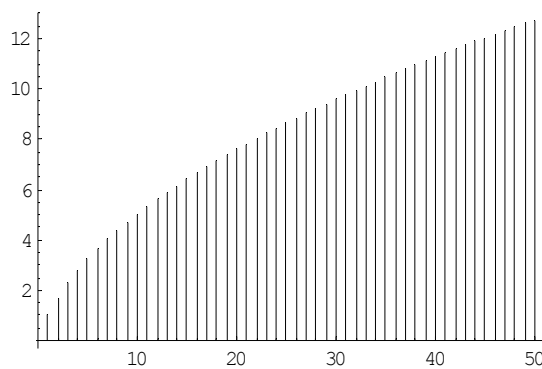


Grafico della serie armonica generalizzata con $p=1/2$:



La serie telescopica

L'esempio più semplice di serie telescopica è la serie di Mengoli. È la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Si osservi che

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Quindi si ha anche che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right]$$

Calcoliamo la sua somma:

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] =$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

questo grazie al fatto che i termini si semplificano 2 a 2.

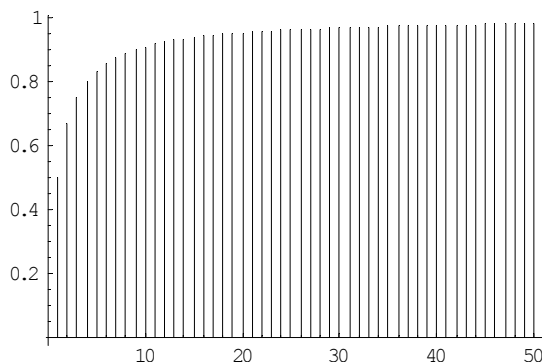
Da questo si vede come il termine generale della serie a_k sia del tipo:

$$a_k = c_k - c_{k+1}$$

di conseguenza grazie alle cancellazioni si trova, in generale, che:

$s_n = c_1 - c_{n+1}$ se il termine $c_n \rightarrow 0$, la serie è convergente e ha somma c_1 .

Grafico della serie di Mengoli:



Esercizi

81. Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ è convergente e calcolare la sua somma.

Soluzione

Si osservi che il termine generale può anche essere scritto come:

$$\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(2n+1)} - \frac{1}{2n+3} \right)$$

la somma ennesima è data da:

$$s_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right)$$

e quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{1}{6}$$

82. Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)(3n+5)}$ è convergente e calcolare la sua somma.

Soluzione

Si osservi che il termine generale può anche essere scritto come:

$$\frac{1}{(3n+2)(3n+5)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(3n+2)} - \frac{1}{3n+5} \right)$$

la somma ennesima è data da:

$$s_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+5} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3n+5} \right)$$

e quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3n+5} \right) = \frac{1}{15}$$

Criteri di convergenza per serie a termini non negativi

Il criterio del confronto

Enunciato

“Date due serie a termini positivi $\sum a_n$ e $\sum b_n$ tali che $a_n \leq b_n$, allora:

1. se $\sum a_n$ diverge anche $\sum b_n$ diverge,
2. se $\sum b_n$ converge anche $\sum a_n$ converge.”

83. Utilizzando il criterio del confronto, verificare la convergenza delle seguenti serie.

a) $\sum \frac{1}{n^3 + 1}$

b) $\sum \frac{2}{n^2 + 2n + 4}$

c) $\sum \frac{n}{(n+2)^3}$

d) $\sum \frac{n}{(2n^2 - 1)}$

e) $\sum \frac{n+3}{(n+2)\sqrt{n+4}}$

(negli esercizi precedenti il segno di sommatoria varia per n che va da zero all'infinito).

soluzioni

a) Abbiamo che $\frac{1}{n^3+1} < \frac{1}{n^3}$. Infatti per poter maggiorare è sufficiente diminuire la quantità a denominatore (ricordiamo che n assume valori sempre positivi).

Ora $\frac{1}{n^3}$ è il termine generale della serie $\sum \frac{1}{n^3}$ che è armonica generalizzata con esponente maggiore di uno (in questo caso infatti l'esponente è 3), dunque la serie converge. Per il criterio del confronto converge anche la serie assegnata.

b) Abbiamo che $\frac{2}{n^2+2n+4} < \frac{2}{n^2+n} < \frac{2}{n^2}$.

Ora $\frac{2}{n^2}$ è il termine generale della serie armonica generalizzata con esponente maggiore di uno (in questo caso infatti l'esponente è 2), dunque la serie converge. Per il criterio del confronto converge anche la serie assegnata.

c) Abbiamo che $\frac{n}{(n+2)^3} < \frac{1}{n^2}$. Per rendersi conto della maggiorazione basta sviluppare il cubo di binomio a denominatore e procedere come nei casi precedenti.

Ora $\frac{1}{n^2}$ è il termine generale della serie armonica generalizzata con esponente maggiore di uno (in questo caso infatti l'esponente è 2), dunque la serie converge. Per il criterio del confronto converge anche la serie assegnata.

d) Abbiamo che $\frac{n}{2n^2-1} > \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}$. In questo caso stiamo minorando.

Ora $\frac{1}{n}$ è il termine generale della serie armonica che diverge. Per il criterio del confronto diverge anche la serie assegnata.

e) Abbiamo che $\frac{n+3}{(n+2)\sqrt{n+4}} > \frac{n+3}{(n+2)(n+4)} > \frac{n+3}{(n+3)(n+4)} = \frac{1}{n+4}$.

Ora $\frac{1}{n+4}$ è il termine generale della serie armonica dunque la serie diverge. Per il criterio del confronto diverge anche la serie assegnata.

Il Criterio Asintotico

Enunciato:

“Due serie a termini positivi $\sum a_n$ e $\sum b_n$ tali che $a_n \sim b_n$, hanno lo stesso comportamento, cioè entrambe o convergono o divergono.”

Osservazione

Già nella dispensa “successioni” abbiamo osservato che calcolare il limite di una successione può essere particolarmente difficoltoso. Talvolta, si cerca di semplificare la successione utilizzando la relazione di asintotico.

Ricordiamo:

La gerarchia degli infiniti

1. Ogni infinito esponenziale è di ordine superiore a ogni infinito potenza.
2. Ogni infinito potenza è di ordine superiore a ogni infinito logaritmo.

Detto in altri termini: “L’esponenziale va più velocemente all’infinito della potenza, la potenza va più velocemente all’infinito del logaritmo”.

84. Utilizzando il criterio asintotico, verificare la convergenza delle seguenti serie.

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2 + \cos 2n + 5}{2n^5 + 7}$$

$$\text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + \log n + 5 \sin n}{5n^7 + 9}$$

$$\text{c) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-4n^2 + \cos^2(3n) + 2^n}{n^5 - 5^n}$$

$$\text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \log^2 n + 3^{n+1}}{-3n^4 - 2^{-n} + 3^{2n}}$$

$$\text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - \cos 4n}{\log n^2 + \sin(3n) + n^4}$$

Soluzioni

a) Si verifica facilmente che $\frac{3n^2 + \cos 2n + 5}{2n^5 + 7} \sim \frac{3}{2n^3}$.

La serie $\sum \frac{3}{2n^3}$ è armonica generalizzata (con esponente maggiore di uno) quindi converge. Per il criterio asintotico converge anche la serie assegnata.

b) In questo caso si ha: $\frac{n^3 + \log n + 5 \sin n}{5n^7 + 9} \sim \frac{1}{5n^4}$

La serie $\sum \frac{1}{5n^4}$ è armonica generalizzata (con esponente maggiore di uno) quindi converge. Per il criterio asintotico converge anche la serie assegnata.

c) Abbiamo che $\frac{-4n^2 + \cos^2(3n) + 2^n}{n^5 - 5^n} \sim -\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

La serie $-\sum \left(\frac{2}{5}\right)^n$ è geometrica con ragione minore di uno, quindi converge. Per il criterio asintotico converge anche la serie assegnata.

d) Si verifica che $\frac{n^2 + \log^2 n + 3^{n+1}}{-3n^4 - 2^{-n} + 3^{2n}} \sim \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

La serie $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ è geometrica con ragione minore di uno, quindi converge. Per il criterio asintotico converge anche la serie assegnata.

e) Si ha: $\frac{n^3 - \cos 4n}{\log n^2 + \sin(3n) + n^4} \sim \frac{1}{n}$.

La serie $\sum \frac{1}{n}$ è armonica quindi divergente. Per il criterio asintotico diverge anche la serie assegnata.

Il criterio della radice

Enunciato

“Sia $\sum a_n$ una serie a termini non negativi per la quale esista il $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Allora se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l = \begin{cases} < 1 & \text{la serie converge} \\ > 1 & \text{la serie diverge} \\ = 1 & \text{caso dubbio} \end{cases}$$

Osservazione

Nel caso $l=1$, il criterio della radice, così come il successivo criterio del rapporto, non forniscono alcuna informazione circa la convergenza o meno della serie considerata. Ciò equivale a dire che il carattere della serie va studiato con altri metodi ma non che essa è indeterminata.

85. Utilizzando il criterio della radice, verificare la convergenza delle seguenti serie.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{3^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n + n^3 + 1}{5^n} \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}\right)^{n^4}$

soluzioni

a) La serie è a termini non negativi, quindi è applicabile il criterio della radice. Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3} = +\infty.$$

La serie assegnata diverge.

b) La serie è a termini positivi quindi è applicabile il criterio della radice. Si

$$\text{ha: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{3^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{2e}{3} > 1.$$

La serie diverge.

c) La serie è a termini positivi. Quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2n + n^3 + 1}{5^n} \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \left(1 - \frac{2}{n^2}\right) = \frac{1}{5} < 1.$$

La serie converge.

d) La serie è a termini positivi, è quindi applicabile il criterio della radice.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}\right)^{n^4}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}\right)^{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n^3 + 1}\right)^{n^3} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{2}{n^3 + 1}\right)^{n^3 + 1}\right)^{\frac{n^3}{n^3 + 1}} &= \frac{1}{e^2} < 1 \end{aligned}$$

La serie converge.

Il criterio del rapporto

Enunciato

“Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi per la quale esista il $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

Allora se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l = \begin{cases} < 1 & \text{la serie converge} \\ > 1 & \text{la serie diverge} \\ = 1 & \text{caso dubbio} \end{cases}$$

Si ricordi che: $n! = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$, si assume per convenzione: $0! = 1$

esempio: $5! = 5 \cdot 4! = 5 \cdot 4 \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

86. Utilizzando il criterio del rapporto, verificare la convergenza delle seguenti serie.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^3}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)!}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(n-1)!}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(n-1)! n^n}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n! n^n}$

soluzioni

a) Il termine generale della serie è: $a_n = \frac{n!}{n^3}$ mentre il termine successivo

è $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^3}$. Si osservi che per poter scrivere il termine successivo

di una serie basta sostituire al termine assegnato, $n+1$, al posto di n .

La serie è a termini positivi, applichiamo quindi il criterio. Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n!}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^3 = +\infty.$$

La serie diverge.

b) Il termine ennesimo della serie assegnata è $a_n = \frac{n^2}{n!}$ mentre

$a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}$ quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = 0 < 1.$$

La serie converge.

c) Il termine generale della serie è $a_n = \frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$ mentre il termine

successivo è $a_{n+1} = \frac{(n+2)^2}{(n+3)!}$ quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2}{(n+3)!} \cdot \frac{(n+2)!}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+3} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^2 = 0 < 1.$$

La serie converge.

d) Il termine ennesimo della serie è $a_n = \frac{4^n}{(n+1)!}$ mentre il successivo è

$a_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{(n+2)!}$ quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n+2} = 0 < 1.$$

La serie converge.

e) Il termine ennesimo della serie è $a_n = \frac{2^{n+1}}{(n-1)!}$ mentre il successivo è

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+2}}{(n)!} \text{ quindi:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2}}{(n)!} \cdot \frac{(n-1)!}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0 < 1.$$

La serie converge.

f) Il termine generale della serie è $a_n = \frac{2^{n+1}}{(n-1)!n^n}$ mentre il successivo è

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+2}}{(n)!(n+1)^{n+1}} \text{ quindi:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2}}{n!(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n-1)!n^n}{2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n(n+1)} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = 0 < 1.$$

La serie converge.

g) Il termine ennesimo della serie è $a_n = \frac{(2n)!}{n!n^n}$ mentre il successivo è

$$a_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)^{n+1}} \text{ quindi:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n!n^n}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{4}{e} > 1.$$

La serie diverge.

Osservazione

Utilizzando il criterio del rapporto si osserva come il fattoriale va più velocemente all'infinito dell'esponenziale, e come n^n va più velocemente all'infinito del fattoriale (e quindi dell'esponenziale).

Il criterio di condensazione

Enunciato

“La serie a termini positivi $\sum a_n$ converge se e solo se converge la serie $\sum 2^n a_{2^n}$.”

87. Utilizzando il criterio di condensazione, verificare la convergenza delle seguenti serie.

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 \log^2 n}$$

$$b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n^2 \log 2n}$$

$$c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{n} \log n}$$

soluzioni

$$a) \text{ Consideriamo la serie } \sum 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{3n} (\log 2^n)^2} = \sum \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{n^2 4^n}.$$

Quest'ultima converge per il criterio della radice, infatti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{n^2 4^n}} = \frac{1}{4} < 1.$$

Quindi anche la serie assegnata per il criterio di condensazione converge.

b) Consideriamo la serie $\sum 2^n a_{2^n} = 3 \sum_{n=1} \frac{2^n}{2^{2n} (\log 2^{n+1})} = \frac{3}{\log 2} \sum \frac{1}{(n+1)2^n}$.

Quest'ultima converge per il criterio della radice, infatti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3}{\log 2} \frac{1}{(n+1)2^n}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Quindi anche la serie assegnata per il criterio di condensazione converge.

c) Consideriamo la serie $\sum 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1} \frac{2^n \cdot 4}{2^{\frac{n}{2}} (\log 2^{n+1})} = \frac{4}{\log 2} \sum \frac{2^{\frac{n}{2}}}{(n+1)}$.

Quest'ultima diverge per il criterio della radice, infatti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4}{\log 2} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{(n+1)}} = \sqrt{2} > 1.$$

Quindi anche la serie assegnata per il criterio di condensazione diverge.
(si osservi come in questo caso utilizzare il criterio della radice è superfluo in quanto il termine generico della serie non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza!)

Serie a termini di segno qualsiasi

E' spontaneo chiedersi se i criteri utilizzati precedentemente per le serie a termini non negativi, possono in generale essere utilizzati per le serie a termini di segno qualsiasi. Questo è possibile grazie al seguente teorema:

Teorema

“ Se la serie $\sum |a_n|$ converge allora converge anche la serie $\sum a_n$ ”

Attenzione!

Il viceversa non è vero!!!

Definizione:

“ Una serie $\sum a_n$ si dirà assolutamente convergente se converge la serie $\sum |a_n|$.

La **convergenza assoluta implica la convergenza semplice** (cioè quella classica), ma non è vero il viceversa.

D’ora in avanti quando parleremo di convergenza ci riferiremo sempre alla convergenza semplice, preciseremo invece sempre quando la convergenza è di tipo assoluto.

Esercizi

88. Studiare la semplice e assoluta convergenza delle seguenti serie.

$$\text{a) } \sum \frac{(-1)^n n^2}{(6n^4 - 4)}$$

$$\text{b) } \sum (-1)^n \frac{(n+2)}{(n^2 + 4)\sqrt{n+1}}$$

$$\text{c) } \sum \frac{(-1)^n n}{(n+3)^3}$$

$$\text{d) } \sum \frac{(-1)^n}{n^4 + 4}$$

$$\text{e) } \sum \frac{(-1)^n}{2n^2 + 3n - 5}$$

(nei precedenti esercizi i valori di n nel segno di sommatoria della serie variano da 0 a infinito).

Soluzione

$$\text{a) Consideriamo la serie dei valori assoluti: } \sum \frac{n^2}{(6n^4 - 4)}.$$

La serie ottenuta converge per il criterio asintotico infatti $\frac{n^2}{(6n^4 - 4)} \sim \frac{1}{6n^2}$,
che converge in quanto serie armonica generalizzata con esponente maggiore

di uno, quindi la serie converge assolutamente e di conseguenza semplicemente.

b) Consideriamo la serie dei valori assoluti: $\sum \frac{(n+2)}{(n+4)\sqrt{n+1}}$.

La serie ottenuta converge per il criterio asintotico infatti la serie ottenuta converge per il criterio asintotico infatti $\frac{(n+2)}{(n^2+4)\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, che converge

in quanto serie armonica generalizzata con esponente maggiore di uno, quindi la serie converge assolutamente e di conseguenza semplicemente.

c) Consideriamo la serie dei valori assoluti: $\sum \frac{n}{(n+3)^3}$. Quest'ultima è

asintotica a $\frac{1}{n^2}$, che converge in quanto serie armonica generalizzata con esponente maggiore di uno, quindi la serie converge assolutamente e di conseguenza semplicemente.

d) La serie dei valori assoluti è: $\sum \frac{1}{n^4+4}$. Quest'ultima è asintotica a $\frac{1}{n^4}$, che converge in quanto serie armonica generalizzata con esponente maggiore di uno, quindi la serie converge assolutamente e di conseguenza semplicemente.

e) La serie dei valori assoluti è: $\sum \frac{1}{2n^2+3n-5}$. Quest'ultima è asintotica a $\frac{1}{2n^2}$, che converge in quanto serie armonica generalizzata con esponente maggiore di uno, quindi la serie converge assolutamente e di conseguenza semplicemente.

Serie a termini di segno alterno

Il Criterio di Leibniz

Enunciato

“La serie a termini di segno alterno $\sum (-1)^n a_n$ con $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ converge se:

1. a_n è decrescente

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. “

Inoltre le somme parziali di indice pari approssimano la somma per eccesso, mentre le somme parziali di indice dispari approssimano la somma per difetto.

Ricordiamo che:

Una successione è decrescente se:

$$(1) \quad a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n .$$

Poiché per applicare il criterio di Leibniz si richiede che $a_n > 0$, la (1) è equivalente a dire che:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \quad \forall n$$

89. Utilizzando il criterio di Leibniz, verificare la convergenza delle seguenti serie.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^5 + 7}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n + 1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^3}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{n}}$

$$f) \sum \frac{(-1)^n}{3n^2 + 4(-1)^n n}$$

(negli esercizi precedenti il valore di n nel segno di sommatoria va sempre da 1 a infinito).

Soluzione

a) Abbiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5 + 7} = 0$, inoltre si verifica facilmente che:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^5 + 7}{(n+1)^5 + 7} < 1 \quad \forall n \geq 1,$$

quindi sono verificate le ipotesi del criterio di Leibniz.

b) Abbiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + n + 1} = 0$, inoltre si verifica facilmente che:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 3n + 9} < 1 \quad \text{per ogni valore di } n \geq 1,$$

quindi sono verificate le ipotesi del criterio di Leibniz.

c) Abbiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^3} = 0$, inoltre si verifica facilmente che:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3}{(n+2)^3} < 1 \quad \text{per ogni valori di } n \geq 1,$$

quindi sono verificate le ipotesi del criterio di Leibniz.

d) Abbiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} = 0$, inoltre si verifica facilmente che:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[3]{n+2}} < 1 \quad \text{per qualsiasi valore di } n \geq 1,$$

quindi sono verificate le ipotesi del criterio di Leibniz.

e) Abbiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} = 0$, inoltre si verifica facilmente che:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\sqrt{n}}{(n+2)\sqrt{(n+1)}} < \frac{(n+2)\sqrt{n}}{(n+2)\sqrt{(n+1)}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n+1)}} < 1 \quad \text{per qualsiasi valore di } n \geq 1$$

quindi sono verificate le ipotesi del criterio di Leibniz.

f) Osserviamo intanto che i termini della serie sono:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{3n^2 + 4n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1}{3n^2 - 4n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

La prima condizione del teorema di Leibniz è banalmente soddisfatta (la successione è infinitesima). Vediamo ora di studiarne la monotonia.

Se n è pari (e quindi $n+1$ è dispari!) dobbiamo verificare che:

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n.$$

Si ha:

$$\frac{1}{3n^2 + 4n} \geq \frac{1}{3(n+1)^2 - 4(n+1)}$$

da cui segue che

$$3(n+1)^2 - 4(n+1) \geq 3n^2 + 4n$$

Svolgendo il quadrato di binomio e semplificando si vede facilmente come non ci sia nessun valore di n pari che soddisfa la disuguaglianza.

Questo ci permette di dire che la serie non converge? Ovviamente no! Perché il criterio di Leibniz, così come tutti i criteri precedentemente illustrati sono solo condizioni sufficienti per la convergenza.

Per stabilire se la serie considerata converge possiamo allora andare a studiarne la convergenza assoluta ricordando che questa implica la semplice. La serie dei valori assoluti è la seguente:

$$\sum \frac{1}{3n^2 + 4(-1)^n n}$$

Utilizzando il criterio del confronto si ha che:

$$\frac{1}{3n^2 + 4(-1)^n n} \sim \frac{1}{3n^2}$$

che converge essendo il termine generico di una serie armonica generalizzata con esponente maggiore di 1.

Esercizi vari

90. Studiare la convergenza della serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^4}{n^4}$

soluzione

La serie assegnata è a termini non negativi, per stabilire la convergenza possiamo utilizzare il criterio di condensazione.
inoltre:

$$\sum 2^n a_{2^n} = \sum \frac{2^n n^4 (\log 2)^4}{2^{4n}} = (\log 2)^4 \sum \frac{n^4}{2^{3n}}$$

Utilizzando il criterio del rapporto si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log^4 2)(n+1)^4}{2^{3n+3}} \cdot \frac{2^{3n}}{n^4 \log^4 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4}{2^3} \cdot \frac{1}{n^4} = \frac{1}{8} < 1$$

La serie converge.

91. Studiare la convergenza assoluta e semplice della serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^3 + 4}$$

soluzione

La serie converge assolutamente infatti, considerata la serie dei moduli, per il criterio del confronto si ha:

$$\frac{|\cos n\pi|}{n^3 + 4} < \frac{1}{n^3},$$

che rappresenta il termine generale della serie armonica generalizzata con esponente maggiore di uno e quindi converge.

92. Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3n^2 + 4} \sin \frac{1}{\sqrt{n+3}}$$

soluzione

La serie converge assolutamente infatti, considerata la serie dei moduli, per il criterio del confronto si ha:

$$\frac{2}{3n^2 + 4} \sin \frac{1}{\sqrt{n+3}} \leq \frac{2}{3} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}},$$

che rappresenta il termine generale della serie armonica generalizzata con esponente maggiore di uno e quindi converge.

93. Assegnata la serie: $\sum_{n=3}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{n+1}\right)^{\frac{n^4+2}{n^2-1}}$

- a) Verificare che il termine generico è un infinitesimo,
- b) Utilizzando un criterio stabilirne la convergenza.

soluzione

Verifichiamo se la serie può convergere calcolando il limite del termine ennesimo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n+1}\right)^{\frac{n^4+2}{n^2-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{3}{n+1}\right)^{n+1} \right)^{\frac{n^4+2}{(n^2-1)(n+1)}} = 0.$$

La serie può dunque convergere. Osserviamo che i termini della serie sono positivi possiamo quindi applicare il criterio della radice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{3}{n+1}\right)^{\frac{n^4+2}{n^2-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n+1}\right)^{\frac{n^4+2}{n^3-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n+1}\right)^{\frac{n^4+2}{(n^3-n)(n+1)}} = \frac{1}{e^3} < 1.$$

La serie converge.

94. Assegnata la serie: $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)^{\frac{n^5+1}{1-n}}$

- a) Verificare che la condizione necessaria è soddisfatta,
- b) Stabilire la convergenza utilizzando il criterio più opportuno.

soluzione

Verifichiamo se la serie può convergere calcolando il limite del termine ennesimo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)^{\frac{n^5+1}{1-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2+3}\right)^{\frac{n^5+1}{1-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2+3}\right)^{\frac{n^5+1}{(1-n)(n^2+3)}} = 0$$

utilizzando il criterio della radice si ricava:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)^{\frac{n^5+1}{1-n}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n^2+3}\right)^{\frac{n^5+1}{1-n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n^2+3}\right)^{\frac{n^5+1}{(1-n)(n^2+3)}}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{n^2+3}\right)^{\frac{n^5+1}{(1-n)(n^2+3)}} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2+3}\right)^{\frac{n^5+1}{n(1-n)(n^2+3)}} = 0 < 1 \end{aligned}$$

La serie assegnata converge.

95. Studiare la convergenza della seguente serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{\frac{n^2+3 \log n+1}{n^3+16n^4+5}}$

soluzione

Utilizzando il criterio asintotico (la serie è a termini positivi) si ha:

$$\sqrt[4]{\frac{n^2 + 3 \log n + 1}{n^3 + 16n^4 + 5}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

L'ultimo termine è il termine generico della serie armonica generalizzata con esponente minore di uno, quindi divergente.

96. Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il comportamento della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 + n^4}{n^{\alpha} \sqrt{1 + n^3}}$$

soluzione

La serie è a termini positivi possiamo, per esempio applicare il criterio asintotico per stabilire la natura della serie assegnata. Si verifica che:

$$\frac{4 + n^4}{n^{\alpha} \sqrt{1 + n^3}} \sim \frac{n^4}{n^{\alpha} n^{\frac{3}{2}}} = n^{\frac{5}{2} - \alpha}$$

la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^{\frac{5}{2} - \alpha}$ è armonica generalizzata con $p = \alpha - \frac{5}{2}$, quindi la serie converge

per $\alpha > \frac{7}{2}$ e diverge per $\alpha \leq \frac{7}{2}$.

32 Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il comportamento della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^{2\alpha} \sqrt[3]{2 + n^2}}{(n^3 + \sqrt{1 + n})^{3-\alpha}}$$

soluzione

La serie è a termini positivi possiamo, per esempio applicare il criterio asintotico per stabilire la natura della serie assegnata. Si verifica che:

$$\frac{2n^{2\alpha} \sqrt[3]{2 + n^2}}{(n^3 + \sqrt{1 + n})^{3-\alpha}} \sim \frac{2n^{\frac{2\alpha + \frac{2}{3}}{3}}}{n^{9-3\alpha}} = n^{\frac{5\alpha - 25}{3}}$$

la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^{5\alpha - \frac{25}{3}}$ è armonica generalizzata con $p = \frac{25}{3} - 5\alpha$, quindi la serie converge per $\alpha < \frac{22}{15}$ e diverge per $\alpha \geq \frac{22}{15}$.

97. Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$ è convergente e calcolare la sua somma.

Soluzione

Si osservi che il termine generale può anche essere scritto come:

$$\frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{(5n-4)} - \frac{1}{5n+1} \right)$$

la somma ennesima è data da:

$$s_n = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{6} \right) + \dots + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1} \right) = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5n+1} \right)$$

e quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5n+1} \right) = \frac{1}{5}.$$

98. Assegnata la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{3-n^3}}$

- a) Studiare la condizione necessaria,
- b) Stabilire la convergenza utilizzando un criterio.

soluzione

Iniziamo col verificare se la condizione necessaria è soddisfatta. Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{3-n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{3-n^3}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right)^{\frac{3-n^3}{n+1}} \right)^{\frac{1}{4n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right)^{\frac{3-n^3}{4n(n+1)}} = 0$$

Utilizzando ora il criterio della radice si ricava:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{3-n^3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\left(\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right)^{\frac{3-n^3}{n+1}} \right)^{\frac{1}{4n}} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right)^{\frac{3-n^3}{4n^2(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}} < 1.$$

La serie assegnata converge.

99. Studiare la convergenza della serie geometrica: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} \right)^n$.

Calcolare, se è possibile, la sua somma.

Soluzione

Affinché la serie assegnata converga è sufficiente richiedere che:

$$\left| \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} \right| < 1 \Rightarrow |x^2 - x + 1| < |x^2 + 1| \Rightarrow x > 0$$

Si osservi che anche la condizione necessaria è verificata!
La sua somma è data da:

$$S = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}} = \frac{1+x^2}{x}$$

100. Studiare la convergenza della seguente serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^3 3^n}$

Soluzione

Il termine generale della serie è: $a_n = \frac{(n-1)!}{n^3 3^n}$ mentre il termine successivo è

$a_{n+1} = \frac{(n)!}{(n+1)^3 3^{n+1}}$. Si osservi che per poter scrivere il termine successivo di

una serie basta sostituire al termine assegnato, $n+1$, al posto di n .

La serie è a termini positivi, applichiamo quindi il criterio. Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n)!}{(n+1)^3 3^{n+1}} \cdot \frac{n^3 3^n}{(n-1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)!}{3(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{(n-1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{3(n+1)^3} = +\infty.$$

La serie diverge.

Osservazione

- Se $\sum a_n$ converge e $\sum b_n$ converge allora $\sum (a_n + b_n)$ converge
- Se $\sum a_n$ converge e $\sum b_n$ diverge allora $\sum (a_n + b_n)$ diverge
- Se $\sum a_n$ diverge e $\sum b_n$ converge allora $\sum (a_n + b_n)$ diverge

101. Studiare la convergenza della seguente serie:

$$\sum \frac{\cos 2n + (-1)^n n^3}{n^5 + 1}$$

(con n da 1 all'infinito)

Soluzione

La serie assegnata può essere scritta anche così:

$$\sum \frac{\cos 2n + (-1)^n n^3}{n^5 + 1} = \sum \frac{\cos 2n}{n^5 + 1} + \sum \frac{(-1)^n n^3}{n^5 + 1}$$

La prima serie converge per il criterio del confronto infatti:

$$\frac{\cos 2n}{n^5 + 1} \leq \frac{1}{n^5}$$

la serie maggiorante è armonica generalizzata con esponente maggiore di uno (in questo caso 5) quindi convergente.

La seconda serie invece converge per il criterio di Leibniz, come si verifica facilmente. La serie di partenza quindi converge essendo somma di serie convergenti.

102. Studiare la convergenza della seguente serie: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + n^2 e^n}{3^{\frac{n}{3}}}$

Soluzione

La serie assegnata può essere scritta anche così:

$$\sum \frac{4^n + n^2 e^n}{3^{\frac{n}{3}}} = \sum \frac{4^n}{3^{\frac{n}{3}}} + \sum \frac{n^2 e^n}{3^{\frac{n}{3}}}$$

La prima serie $\sum \frac{4^n}{3^{\frac{n}{3}}} = \sum \left(\frac{4}{\sqrt[3]{3}} \right)^n$ è geometrica con ragione $\frac{4}{\sqrt[3]{3}} > 1$ quindi diverge.

Anche la seconda serie diverge come si può vedere utilizzando il criterio della radice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 e^n}{3^{\frac{n}{3}}}} = \frac{e}{\sqrt[3]{3}} > 1.$$

La serie di partenza quindi diverge essendo somma di serie divergenti .