Esercizio

Determinare l'insieme di convergenza puntuale, assoluta, uniforme, totale della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+1/\sqrt{n})}{2^n}(x-5)^n\,.$$

$z = x-5$ lavoriamo con variabile z

è una serie di potenze centro $x_0 = 5$ $\qquad c_n = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{2^n}$

Calcolo il raggio di convergenza

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{2^n}\cdot\frac{2^{n+1}}{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\cancel{2^n}}\cdot\frac{\cancel{2^n}\cdot 2}{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}\right.$$

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$$

$$\left.\cdot\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\;\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\,2\sqrt{n+1}\right| =$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

$$= 2$$

In virtù del teorema di Abel

in $z \in (-2, 2)$ conv. assoluta e puntuale

in $z \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ non ho convergenza

Devo studiare la convergenza negli estremi $z = R$, $z = -R$

$\boxed{z = R = 2}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{2^n} z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\cancel{2^n}} \cancel{2^n}$

$\displaystyle = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ← è serie a segni positivi

$\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$

Per il criterio asintotico, la Σ ha lo stesso carattere di

$\displaystyle \sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$

serie armonica con $\alpha < 1$ diverge ($\alpha = \frac{1}{2}$)

In $z = 2$ la serie diverge

$$\boxed{z = -R = -2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{2^n}(-2)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\cancel{2^n}} (-1)^n \cancel{2^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

È una serie numerica a segni alterni

Essa converge assolutamente?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

che diverge (visto prima)

Quindi non converge assolutamente

Vediamo se converge semplicemente

Uso Teorema di Leibniz

i) $\lim_{n\to+\infty} |y_n| = 0$? sì

$$\lim_{n\to+\infty} \left|(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$$

ii) $|y_{n+1}| \leq |y_n|$ (decrescente o non crescente)

3

$$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \leq \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad ?$$

applico "e^x" crescente

$$\Longleftrightarrow \quad 1+\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 1+\frac{1}{\sqrt{n}} \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{n+1} \geq \sqrt{n} \quad \text{vero} \quad (\Sigma')$$

Sono verificate le due Hp del Teo di Leibniz. Quindi la serie a segni alterni converge

Su Tali basi:

$z \in [-2, 2)$ la serie iniziale (con "z") converge puntualmente

$z \in (-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$ la serie non converge

$z \in (-2, 2)$ la serie conv. assolutamente

Dobbiamo ancora valutare la conv. uniforme e la conv. Totale

Dalla Teoria sappiamo che la serie di potenze converge totalmente (e quindi uniformemente) negli "chiusi contenuti" di $(-2, 2)$, cioè gli intervalli del tipo

$$[-2+\delta, 2-\delta] \quad \forall \delta>0$$

Mi chiedo: può la mia serie convergere uniformemente "fino al punto 2 escluso", cioè per esempio in $[0, 2)$? In virtù della teoria sviluppata a lezione, se la Σ convergesse uniformemente in $[0, 2)$, allora dovrebbe convergere uniformemente in $[0, 2]$.

Ma la Σ non può convergere in $[0, 2]$, perché non converge puntualmente in $x = 2$

Quindi la Σ converge uniformemente in $[0, 2-\delta]$ $\forall \delta > 0$

Per quanto riguarda conv. uniforme in $[-2,0]$?

Mi accorgo che la serie di potenze è una serie a segni alterni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{2^n} z^n =$$

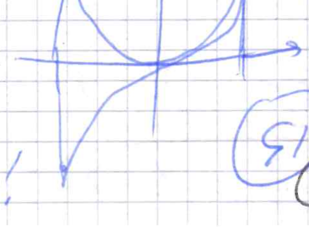
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{2^n} (-z)^n$$

$-z \geq 0$ se $z \in [-2,0]$

Verifico la condizione sufficiente per la conv. uniforme delle serie di funzioni a segno alterno cioè:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{z\in[-2,0]} \left| \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{2^n} z^n \right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\cancel{2^n}} \right| \cdot \cancel{\left|(-2)^n\right|} =$$



$$= \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$$ ok!

S1

$[-2, 0] \cup [0, 2-\delta] =$

$= [-2, 2-\delta]$ $\forall \delta > 0$ l'intervallo di conv. uniforme

Converge totalmente in $[-2, 0]$?

No perché non converge assolutamente in $[-2, 0]$.

Quindi mi restano gli intervalli chiusi contenuti, che so può essere intervalli di convergenza totale:

Conv. totalmente in $[-2+\delta, 2-\delta]$ $\forall \delta > 0$

Schema finale:

Per z, gli intervalli massimali sono:

$[-2, 2)$ conv. puntuale

$(-2, 2)$ conv. assoluta

$[-2, 2-\delta]$ $\forall \delta > 0$ conv. uniforme

$[-2+\delta, 2-\delta]$ conv. totale

Per x:

$z = x - x_0 = x - 5$

$[3, 7)$ conv. puntuale

$(3, 7)$ conv. assoluta

$[3, 7-\delta]$ conv. uniforme

$[3+\delta, 7-\delta]$ conv. totale

(7)

lascia/re δ, va bene.