

Capitolo 7

Integrali impropri

La teoria degli integrali definiti per le funzioni di una variabile era basata sull'ipotesi che l'intervallo di integrazione fosse finito e che la funzione da integrare fosse limitata. In alcuni casi è possibile definire integrali estesi a domini non limitati oppure integrali di funzioni non limitate.

7.1 Integrali estesi ad intervalli non limitati

Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo $[a, +\infty)$ e supponiamo che per ogni $b > a$ essa risulti integrabile in $[a, b]$. Vogliamo dare senso alla scrittura

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx,$$

detto *integrale improprio* di f in $[a, +\infty)$. Introdotta la funzione $I(b) = \int_a^b f(x) dx$ consideriamo il limite di $I(b)$ per $b \rightarrow +\infty$. Se tale limite esiste ed è finito, porremo

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

e diremo che l'integrale improprio di f converge. Se il suddetto limite non esiste, o non è finito, diremo che l'integrale non converge (o diverge).

- Esempi

1) Dato l'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx,$$

si ha

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan b,$$

da cui

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2},$$

quindi l'integrale improprio I converge.

2) Dato l'integrale improprio

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3} dx,$$

si ha

$$\int_1^b \frac{x^2 + 1}{x^3} dx = \ln b - \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{2}.$$

Ne segue che

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{x^2 + 1}{x^3} dx = +\infty.$$

quindi I è divergente.

3) Dato l'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} \cos x \, dx,$$

si ha

$$\int_0^b \cos x \, dx = \sin b,$$

da cui

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \cos x \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sin b.$$

Ma quest'ultimo limite non esiste quindi I non è convergente.

4) Consideriamo l'integrale improprio

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx,$$

con $a \in \mathbb{R}^{++}$ e studiamo il

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{1}{x^\alpha} dx,$$

al variare di α in $\mathbb{R}$. Osserviamo innanzitutto che per $\alpha = 1$ l'integrale diverge. Consideriamo allora $\alpha \neq 1$. Si ha

$$\int_a^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

da cui,

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty, & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$$

Ne segue che I converge per $\alpha > 1$ e diverge per $\alpha \leq 1$.

5) Sia $a > 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Studiamo il comportamento dell'integrale improprio

$$I = \int_a^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\alpha} dx.$$

Se $\alpha \neq 1$ abbiamo

$$I = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\ln x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_a^b = \begin{cases} \frac{(\ln a)^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha < 1 \end{cases}$$

Se invece $\alpha = 1$ si ottiene

$$I = \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln(\ln x)]_a^b = +\infty.$$

Concludiamo quindi

$$I = \begin{cases} \frac{(\ln a)^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Dalla definizione di integrale improprio segue che se i due integrali $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ convergono, allora, per ogni coppia di numeri λ e μ , l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx,$$

converge. La dimostrazione di questa proprietà segue dall'osservare che

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

Poiché i due integrali a secondo membro ammettono limite per $b \rightarrow +\infty$, anche il primo membro ammetterà limite e si avrà

$$\int_a^{+\infty} [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x) dx + \mu \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

Per gli integrali impropri vale anche la regola di integrazione per parti. Se f e g sono funzioni con derivate continue in $[a, +\infty)$, sussiste la formula

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x) dx,$$

purché due dei tre termini presenti in questa formula abbiano senso.

• Esempio

Calcolare, se risulta convergente, il seguente integrale improprio

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx,$$

essendo $n \in \mathbb{N}$. Mediante una integrazione per parti si ha

$$\int_0^b x^n e^{-x} dx = [-x^n e^{-x}]_0^b + n \int_0^b x^{n-1} e^{-x} dx.$$

Passando al limite per $b \rightarrow +\infty$ si ottiene

$$I_n = nI_{n-1}.$$

Riapplicando successive integrazioni per parti ricaviamo

$$I_n = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 I_0 = n! I_0.$$

L'integrale I_n risulta allora convergente se lo è l'integrale I_0 . Poiché

$$I_0 = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^b = 1,$$

concludiamo che I_n è convergente e vale

$$I_n = n!.$$

Non sempre è possibile stabilire se un integrale improprio è convergente o meno, facendo uso della definizione. È tuttavia possibile dimostrare alcuni criteri sufficienti per la convergenza degli integrali impropri. Considereremo qui i più importanti.

Teorema 7.1 (*Criterio del confronto*) Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni integrabili in $[a, b]$, per qualunque $b > a$ e supponiamo che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \geq a$. Allora, se $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge, anche $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge, mentre se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge, allora diverge anche $\int_a^{+\infty} g(x) dx$.

Dim. Supponiamo che $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converga. Posto $I(b) = \int_a^b f(x) dx$, $J(b) = \int_a^b g(x) dx$, da una nota proprietà degli integrali, per $b > a$ si ha

$$0 \leq I(b) \leq J(b).$$

Inoltre, essendo $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$ per $x \geq a$, le funzioni $I(b)$ e $J(b)$ risultano non decrescenti in $[a, +\infty)$. D'altra parte, poiché $J(b)$ ammette limite finito per $b \rightarrow +\infty$, dalla disuguaglianza precedente risulta che $I(b)$ è limitata superiormente. Ne segue che $I(b)$ converge per $b \rightarrow +\infty$.

La seconda parte del teorema segue immediatamente dalla prima. Infatti, se per ipotesi $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge, $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ non può convergere senza contraddire l'ipotesi.

• Esempio

Studiare la convergenza dell'integrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\tanh x}{1 + x^2 + \cos^2 x} dx.$$

Poiché si ha

$$0 \leq \frac{\tanh x}{1 + x^2 + \cos^2 x} \leq \frac{1}{1 + x^2}, \quad \forall x \in [0, +\infty),$$

ed essendo $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ convergente, in forza del teorema 7.1, si ottiene la convergenza di I .

Teorema 7.2 (*Criterio del confronto asintotico*) Siano $f(x)$ e $g(x)$ integrabili in $[a, b]$, per qualunque b e non negative in $[a, +\infty)$. Supponiamo che esista un $\bar{x}$ tale che, per $x > \bar{x}$ sia $g(x) > 0$ e supponiamo inoltre che esista il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Allora se tale limite è finito e diverso da zero, la convergenza (o la divergenza) di $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ implica la convergenza (o la divergenza) di $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ e viceversa. Se il limite è nullo la convergenza dell'integrale di g implica la convergenza di quello di f mentre la divergenza dell'integrale di f implica la divergenza di quello di g . Infine se il limite è infinito, la divergenza dell'integrale di g implica la divergenza di quello di f e la convergenza dell'integrale di f implica la convergenza dell'integrale di g .

Dim. Se il limite del rapporto f/g è $k > 0$, dalla definizione di limite segue che, $\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon : k - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < k + \varepsilon, \forall x > x_\varepsilon$. Preso $x > x_1 = \max(x_\varepsilon, \bar{x})$ si ha $g(x)$ strettamente positiva, quindi scegliendo $\varepsilon < k$, si può scrivere

$$0 < g(x)(k - \varepsilon) < f(x) < g(x)(k + \varepsilon).$$

Se $\int_{x_1}^{+\infty} g(x) dx$ converge, convergerà anche $\int_{x_1}^{+\infty} (k + \varepsilon)g(x) dx$ e, per il teorema 7.1, converge anche $\int_{x_1}^{+\infty} f(x) dx$. Viceversa, se $\int_{x_1}^{+\infty} f(x) dx$ converge, allora $\int_{x_1}^{+\infty} (k - \varepsilon)g(x) dx$ converge e quindi $\int_{x_1}^{+\infty} g(x) dx$ converge. Analogamente, la divergenza di uno dei due integrali implica la divergenza dell'altro.

Se il limite del rapporto f/g fosse nullo, allora si avrebbe

$$0 \leq \frac{f(x)}{g(x)} < \varepsilon \quad \text{per } x > x_\varepsilon,$$

da cui, se $x > \max(x_\varepsilon, \bar{x}) = x_1$, si ha $0 \leq f(x) < \varepsilon g(x)$. Utilizzando ancora il criterio del confronto, concludiamo che la convergenza di $\int_{x_1}^{+\infty} g(x) dx$ implica la convergenza di $\int_{x_1}^{+\infty} f(x) dx$ mentre la divergenza di $\int_{x_1}^{+\infty} f(x) dx$ implica la divergenza di $\int_{x_1}^{+\infty} g(x) dx$.

Se poi il limite di f/g fosse $+\infty$, esisterebbe un M tale che, per $x > x_M$,

$$f(x) > M g(x).$$

Ancora il teorema del confronto ci permette di concludere che la convergenza di $\int_{x_M}^{+\infty} f(x) dx$ implica la convergenza di $\int_{x_M}^{+\infty} g(x) dx$ e la divergenza di $\int_{x_M}^{+\infty} g(x) dx$ implica la divergenza di $\int_{x_M}^{+\infty} f(x) dx$.

Notiamo infine che se, per $x_1 > a$, l'integrale $\int_{x_1}^{+\infty} f(x) dx$ converge (diverge), allora anche $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge (diverge) in quanto i due integrali differiscono per un numero finito (lo stesso vale ovviamente per $x_M > a$).

• Esempio

Stabilire la natura dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^3 + 3x + 4} dx.$$

Osserviamo che l'integrando è un infinitesimo dello stesso ordine di $\frac{1}{x}$ per $x \rightarrow +\infty$, e si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^2+1}{x^3+3x+4}}{\frac{1}{x}} = 2 > 0.$$

Dal teorema 7.2 segue che l'integrale di partenza si comporta come l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$, il quale è divergente.

Dal teorema del confronto si può ottenere una condizione necessaria per la convergenza di cui omettiamo la dimostrazione. Essa stabilisce che se $f(x)$ ammette limite per $x \rightarrow +\infty$, allora vale l'implicazione

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ convergente} \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Sempre facendo uso del teorema 7.1, si può provare facilmente il seguente risultato.

Teorema 7.3 Sia $f(x)$ integrabile in $[a, b]$ per qualunque $b > a > 0$. Supponiamo che esista un $\bar{x} > a$ tale che $\forall x > \bar{x}$,

$$0 \leq f(x) \leq \frac{M}{x^\alpha},$$

essendo $M > 0$ e $\alpha > 1$. Allora $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge. Se invece, per $x > \bar{x}$ si ha

$$f(x) \geq \frac{M}{x},$$

essendo sempre $M > 0$, allora $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge.

Dim. La dimostrazione segue direttamente dal teorema del confronto e da quanto visto sull'integrale improprio $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ per $\alpha > 1$ e per $\alpha = 1$.

Osserviamo ancora che i risultati precedenti ci permettono di stabilire la convergenza o la divergenza dell'integrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, studiando il comportamento asintotico di f . In particolare, se f non è un infinitesimo per $x \rightarrow \infty$, l'integrale non potrà convergere, mentre se $f(x)$ è un infinitesimo per $x \rightarrow \infty$ allora la convergenza dipenderà dall'ordine di infinitesimo. Se questo è maggiore di 1 avremo convergenza, se invece è minore o uguale a 1 l'integrale divergerà.

• Esempi

1) Studiare la natura dell'integrale

$$I = \int_3^{+\infty} \frac{x-2}{x^3+x^2+2x+5} dx.$$

Poiché si può scrivere

$$\frac{x-2}{x^3+x^2+2x+5} = \frac{x-2}{x^2(x-2)+3x^2+2x+5} < \frac{1}{x^2},$$

per il teorema 7.3 si ha la convergenza di I .

2) Stabilire la natura dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) dx.$$

La funzione integranda è un infinitesimo per $x \rightarrow +\infty$. Calcolandone l'ordine troviamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \frac{1}{2}, \quad \text{per } \alpha = 2.$$

Ne segue, per $x > \bar{x} > 1$,

$$\frac{1}{2} - \varepsilon < x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{2} + \varepsilon \implies \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right) < \frac{\frac{1}{2} + \varepsilon}{x^2}.$$

Per il teorema 7.3, otteniamo quindi la convergenza dell'integrale.

3) Stabilire la natura dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) dx.$$

Anche in questo caso la funzione integranda è un infinitesimo per $x \rightarrow +\infty$. Poiché si verifica facilmente che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} = 1,$$

ricaviamo, per $x > \bar{x}$,

$$\frac{1}{x}(1 - \varepsilon) < \frac{\pi}{2} - \arctan x < \frac{1}{x}(1 + \varepsilon)$$

da cui, sempre per il teorema 7.3, deduciamo la divergenza dell'integrale improprio.

Si dice che l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ è *assolutamente convergente* se è convergente l'integrale $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$. Si dimostra che ogni integrale improprio assolutamente convergente è convergente mentre, in generale, non vale il viceversa.

• Esempi

1) Verificare che l'integrale

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx,$$

è assolutamente convergente.

Poiché si ha $|\frac{\cos x}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, mediante il teorema 7.3 concludiamo che I è assolutamente convergente.

2) Verificare che l'integrale improprio

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

è convergente ma non è assolutamente convergente.

Mediante una integrazione per parti si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Poiché l'integrale all'ultimo membro è assolutamente convergente, esso sarà anche convergente e quindi I è convergente. Si può verificare in modo simile che $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ converge. Consideriamo ora l'integrale

$$\bar{I} = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx.$$

Poiché si ha $|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, si ottiene

$$\int_1^b \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \int_1^b \frac{1 - \cos 2x}{2x} dx = \int_1^b \frac{1}{2x} dx - \int_1^b \frac{\cos 2x}{2x} dx.$$

Prendendo il limite per $b \rightarrow +\infty$ si riconosce che il primo integrale a secondo membro diverge mentre il secondo converge. Quindi $\bar{I}$ diverge.

7.2 Integrali di funzioni non limitate

Consideriamo una funzione $f(x)$ definita in $[a, b]$ e integrabile in $[a, b - \epsilon]$ essendo ϵ un numero positivo piccolo a piacere. Supponiamo che $f(x)$ sia non limitata in $(b - \epsilon, b)$. Chiameremo

$$I = \int_a^b f(x) dx,$$

integrale improprio di $f(x)$ in $[a, b]$. Introdotta la funzione di ϵ

$$I(\epsilon) = \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx,$$

diremo che l'integrale improprio I è convergente se esiste ed è finito il

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} I(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx.$$

Se tale limite non è finito, diremo che I è divergente, se il limite non esiste diremo che l'integrale non converge. Analogamente, se $f(x)$ definita in $(a, b]$ è integrabile in $[a + \epsilon, b]$ e non limitata in $(a, a + \epsilon)$, diremo che I è convergente se esiste ed è finito il

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx,$$

altrimenti diremo che I è divergente. Si può anche avere il caso in cui $f(x)$ sia definita in $[a, b]$ escluso un punto interno c e sia $f(x)$ integrabile in $[a, c - \epsilon]$ e in $[c + \epsilon, b]$, mentre risulti non limitata in $(c - \epsilon, c + \epsilon)$. In tal caso si pone

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right],$$

qualora il limite esista e sia finito.

• Esempi

1) Consideriamo l'integrale improprio

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx.$$

Posto $I(\epsilon) = \int_{1+\epsilon}^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$, si ha $I(\epsilon) = [2\sqrt{x-1}]_{1+\epsilon}^2 = 2 - 2\sqrt{\epsilon}$, da cui, passando al limite per $\epsilon \rightarrow 0^+$, otteniamo

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = 2.$$

Osserviamo che questo integrale improprio può essere anche ricondotto ad un integrale ordinario mediante la sostituzione $\sqrt{x-1} = t$. Si ha infatti,

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \int_0^1 \frac{2t}{t} dt = \int_0^1 2 dt = 2.$$

2) Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$I = \int_0^b \frac{1}{x^\alpha} dx,$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Dalla definizione, per $\alpha \neq 1$, abbiamo

$$\int_0^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_\epsilon^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_\epsilon^b = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{\epsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right].$$

Tale limite è finito se $\alpha < 1$ mentre è infinito se $\alpha > 1$. Se $\alpha = 1$ si ha

$$\int_\epsilon^b \frac{1}{x} dx = [\ln x]_\epsilon^b = \ln b - \ln \epsilon.$$

Per $\epsilon \rightarrow 0^+$ si ottiene un limite infinito. Concludiamo che I è convergente per $\alpha < 1$ e divergente per $\alpha \geq 1$.

3) Sia $0 < b < 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Studiamo l'integrale improprio

$$I = \int_0^b \frac{1}{x |\ln x|^\alpha} dx.$$

Per $\alpha \neq 1$ abbiamo

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{(\ln \frac{1}{x})^{1-\alpha}}{\alpha-1} \right]_\epsilon^b = \begin{cases} \frac{(\ln \frac{1}{b})^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha < 1 \end{cases}$$

Per $\alpha = 1$ si ha poi

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[-\ln \left(\ln \frac{1}{x} \right) \right]_\epsilon^b = +\infty.$$

Concludiamo quindi

$$I = \begin{cases} \frac{(\ln \frac{1}{b})^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Come nel caso degli integrali estesi ad intervalli non limitati, si possono ricavare alcune condizioni sufficienti per la convergenza (o la divergenza) degli integrali di funzioni non limitate. Enunceremo tali risultati senza dimostrarli.

Teorema 7.4 (*Criterio del confronto*) Siano $f(x)$ e $g(x)$ integrabili in $[a, b - \epsilon]$ e non limitate in $(b - \epsilon, b)$ e tali che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ in $[a, b)$. Allora la convergenza di $\int_a^b g(x) dx$ implica la convergenza di $\int_a^b f(x) dx$ e la divergenza di $\int_a^b f(x) dx$ implica la divergenza di $\int_a^b g(x) dx$.

Teorema 7.5 (*Criterio del confronto asintotico*) Siano $f(x)$ e $g(x)$ positive e integrabili in $[a, b - \epsilon]$, non limitate in $(b - \epsilon, b)$. Supponiamo inoltre che esista il limite

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Allora se tale limite è finito e diverso da zero, la convergenza (o la divergenza) di $\int_a^b f(x) dx$ implica la convergenza (o la divergenza) di $\int_a^b g(x) dx$ e viceversa. Se il limite è nullo la convergenza dell'integrale di g implica la convergenza di quello di f mentre la divergenza dell'integrale di f implica la divergenza di quello di g . Infine se il limite è infinito, la divergenza dell'integrale di g implica la divergenza di quello di f e la convergenza dell'integrale di f implica la convergenza dell'integrale di g .

Si dice che l'integrale improprio $\int_a^b f(x) dx$ è assolutamente convergente se l'integrale $\int_a^b |f(x)| dx$ è convergente. Si dimostra anche in questo caso che se un integrale improprio è assolutamente convergente allora è convergente.

Teorema 7.6 Sia $f(x)$ continua in $[a, b)$ e non limitata in $(b - \epsilon, b)$. Se esiste un $M > 0$ ed un $\alpha < 1$ tali che

$$|f(x)| \leq \frac{M}{(b-x)^\alpha}, \quad \forall x \in (b - \epsilon, b),$$

allora l'integrale $\int_a^b f(x) dx$ è assolutamente convergente. Se invece esiste un $M > 0$ ed un $\alpha \geq 1$ tali che

$$|f(x)| \geq \frac{M}{(b-x)^\alpha}, \quad \forall x \in (b - \epsilon, b),$$

allora l'integrale $\int_a^b f(x) dx$ è divergente.

• Esempi

1) Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \ln x dx.$$

Poiché il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \frac{\ln x}{\frac{1}{x^\alpha}} \right| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} \right| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \frac{x^\alpha}{\alpha} \right|,$$

risulta nullo per $0 < \alpha < 1$, concludiamo, per il confronto asintotico, che l'integrale dato è assolutamente convergente.

2) Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \ln(\tan x) dx.$$

Osserviamo che in un intorno destro dello zero la tangente è maggiore del suo argomento. Quindi per $0 < \epsilon < \pi/4$,

$$|\ln(\tan x)| < |\ln x| \quad \forall x \in (0, \epsilon)$$

In base all'esempio precedente, tramite il criterio del confronto, concludiamo che l'integrale dato è assolutamente convergente.

3) Stabilire la natura del seguente integrale improprio (*di Fresnel*),

$$I = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx.$$

Osserviamo che mediante la sostituzione $x^2 = t$ questo integrale può essere trasformato in un integrale improprio di una funzione non limitata. Si ottiene infatti $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt$$

Studiamo questo integrale. Si ha

$$I = \int_0^1 \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt + \int_1^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt.$$

Poiché

$$\left| \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} \right| \leq \frac{1}{2\sqrt{t}},$$

il primo integrale risulta assolutamente convergente. Si ha poi, mediante una integrazione per parti,

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = \left[\frac{-\cos t}{2\sqrt{t}} \right]_1^\infty - \frac{1}{4} \int_1^\infty \frac{\cos t}{t^{3/2}} dt = \frac{1}{2} \cos 1 - \frac{1}{4} \int_1^\infty \frac{\cos t}{t^{3/2}} dt.$$

D'altra parte,

$$\left| \frac{\cos t}{t^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{t^{3/2}},$$

quindi il secondo integrale è convergente. L'integrale di Fresnel è quindi convergente. Un risultato analogo vale per l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx.$$

7.3 Integrali impropri di funzioni di più variabili

Il concetto di integrazione in domini non limitati o di funzioni non limitate si può estendere al caso di funzioni di più variabili. Per semplicità consideriamo qui il caso delle funzioni di due variabili. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio non necessariamente limitato ed $f(x, y)$ una funzione non necessariamente limitata in D . Vogliamo dare un senso alla scrittura

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

che chiameremo *integrale improprio* di f in D . Supponiamo che esista una successione di domini contenuti in D , limitati e misurabili $\{D_n\}$ tali che $D_n \subset D_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo inoltre che $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mis}(D_n) = \text{mis}(D)$, essendo $\text{mis}(D)$ l'estremo superiore delle intersezioni di D con un qualunque cerchio. Se $f(x, y)$ è integrabile in D_n per qualsiasi n , e se esiste ed è finito il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy,$$

indipendentemente dalla scelta della successione $\{D_n\}$, allora diremo che l'integrale improprio di f in D è convergente e scriveremo

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx dy$$

• Esempi

1) Stabilire se l'integrale improprio

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \, dx dy, \quad \text{con } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$$

è convergente.

La funzione f non è limitata in un intorno dell'origine. Consideriamo allora la successione di domini $\{D_n\}$ con

$$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

In D_n la funzione f è integrabile e si ha

$$\iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \, dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\rho^{2/3}} \rho \, d\rho \right) d\theta = \frac{3}{2}\pi \left(1 - \frac{1}{n^{4/3}} \right).$$

passando al limite, si trova che l'integrale improprio converge e si ha

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \, dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \, dx dy = \frac{3}{2}\pi.$$

2) Stabilire se l'integrale improprio

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \, dx dy,$$

converge.

Il dominio non è limitato e ha misura infinita. Consideriamo la successione di domini limitati $\{D_n\}$ dove

$$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq n^2\}.$$

Si ha

$$\iint_{D_n} \frac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \, dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^n \frac{\rho \, d\rho}{(\rho^2 + 1)^2} \right) d\theta = \pi \left(1 - \frac{1}{n^2 + 1} \right).$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$ si ottiene la convergenza e il risultato $I = \pi$.

7.4 Esempi di calcolo di integrali impropri

Consideriamo qui alcuni esempi notevoli di integrali impropri il cui calcolo richiede tecniche particolari.

1) Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Osserviamo che si può sempre scrivere

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy.$$

D'altra parte

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy,$$

dove D è il dominio non limitato rappresentato dall'intero primo quadrante. Per calcolare questo integrale doppio improprio consideriamo la successione di domini $D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : x^2 + y^2 \leq n^2\}$. Otteniamo

$$\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^n e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = \frac{\pi}{4} (-e^{-n^2} + 1).$$

da cui passando al limite per $n \rightarrow \infty$ si ha, $I^2 = \frac{\pi}{4}$. Si ottiene così

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2) Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx.$$

Introduciamo l'integrale ausiliario

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx,$$

dove $\alpha > 0$. Come vedremo tra poco, questo integrale converge e si può quindi considerare $I(\alpha, \beta)$ come una funzione di β . La funzione integranda, pensata come funzione di β e x risulta continua in tutto il primo quadrante esclusa l'origine, e ammette derivata parziale rispetto a β continua. Utilizzando la regola di derivazione sotto il segno di integrale, abbiamo

$$\frac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} \right) dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x dx.$$

Mediante una integrazione per parti si ha

$$\int_0^b e^{-\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} [\alpha + (\beta \sin b - \alpha \cos \beta b) e^{-\alpha b}].$$

Prendendo il limite per $b \rightarrow +\infty$ si ottiene allora

$$\frac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

D'altra parte $I(\alpha, \beta)|_{\beta=0} = 0$. A questo punto integriamo rispetto a β , ottenendo

$$I(\alpha, \beta) = \int \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} d\beta = \arctan \frac{\beta}{\alpha} + c.$$

Imponendo la condizione $I(\alpha, 0) = 0$, otteniamo $c = 0$. Per la continuità di $I(\alpha, \beta)$ l'integrale $I(\beta)$ si ottiene come limite di $I(\alpha, \beta)$ per $\alpha \rightarrow 0^+$. Si ha

$$I(\beta) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \arctan \frac{\beta}{\alpha} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{per } \beta > 0 \\ 0 & \text{per } \beta = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{per } \beta < 0. \end{cases}$$

3) Calcolare, se converge, l'integrale improprio

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x \, dx$$

essendo $\alpha > 0$.

Consideriamo l'integrale

$$I_b(\beta) = \int_0^b e^{-\alpha x^2} \cos \beta x \, dx,$$

dove α ha il ruolo di un parametro. Derivando otteniamo

$$\frac{dI_b(\beta)}{d\beta} = - \int_0^b e^{-\alpha x^2} \sin \beta x \, x \, dx.$$

Mediante una integrazione per parti, si ha

$$\frac{dI_b(\beta)}{d\beta} = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha b^2} \sin \beta b - \frac{\beta}{2\alpha} \int_0^b e^{-\alpha x^2} \cos \beta x \, dx = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha b^2} \sin \beta b - \frac{\beta}{2\alpha} I_b(\beta).$$

Quest'ultima eguaglianza può essere vista come una equazione differenziale del primo ordine per la funzione $I_b(\beta)$. L'integrale generale di questa equazione è

$$I_b(\beta) = C e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}} + \frac{1}{2\alpha b} e^{-\alpha b^2} \left(\frac{\beta}{2\alpha} \sin \beta b - \cos \beta b \right).$$

Passando al limite per $b \rightarrow +\infty$ si ricava

$$I(\alpha, \beta) = \lim_{b \rightarrow +\infty} I_b(\beta) = C e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

Per determinare la costante di integrazione C , osserviamo che, dal risultato dell'esempio 1),

$$I(\alpha, 0) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \, dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \, dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

L'integrale improprio $I(\alpha, \beta)$ risulta quindi convergente e si ha

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

Capitolo 8

Serie numeriche

8.1 Definizioni e operazioni sulle serie

Data la successione di numeri reali $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si dice *serie numerica* l'espressione

$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Al fine di attribuire un significato numerico alla somma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, consideriamo la successione delle *somme parziali* $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, definite da

$$\begin{aligned} S_1 &= y_1 \\ S_2 &= y_1 + y_2 \\ S_3 &= y_1 + y_2 + y_3 \\ &\vdots \\ S_n &= y_1 + y_2 + \dots + y_n = \sum_{k=1}^n y_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

Se tale successione ammette limite finito S allora tale limite si dice somma della serie numerica. La serie si dice allora *convergente* e si scrive

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n y_k.$$

Se il limite è infinito la serie si dice *divergente*, e se il limite non esiste si dice che la serie è non convergente o *oscillante*. Il comportamento di S_n per $n \rightarrow \infty$ si dice anche *carattere* della serie.

- Esempi _____

1) La serie

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

è convergente. Infatti si ha

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}, \end{aligned}$$

da cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

2) Dato $x \in \mathbb{R}$, consideriamo la serie

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1},$$

detta serie *geometrica*. Osserviamo che

$$S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \begin{cases} n & \text{se } x = 1 \\ \frac{1-x^n}{1-x} & \text{se } x \neq 1. \end{cases}$$

Quindi, se $x = 1$ la serie diverge. Se $|x| < 1$ risulta $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$. Allora la serie converge e si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-x}.$$

Supponiamo ora che $x > 1$. Allora $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = +\infty$, ed essendo $1 - x < 0$, si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^n}{1-x} = +\infty.$$

Infine, se $x \leq -1$, il termine x^n oscilla in quanto risulta positivo per n pari e negativo per n dispari ed inoltre $|x^n| \geq 1$. Ne segue che la serie geometrica risulta oscillante per $x \leq -1$. Riassumendo abbiamo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \begin{cases} \text{è oscillante per } x \leq -1 \\ \text{è convergente per } -1 < x < 1 \\ \text{è divergente per } x \geq 1. \end{cases}$$

Data la serie $y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n + \dots$ considero la serie ottenuta da questa eliminando i primi k termini, ovvero

$$y_{k+1} + y_{k+2} + \dots + y_n + \dots = \sum_{n=k+1}^{\infty} y_n.$$

Questa serie si dice *k-esimo resto* della serie data. Vale la seguente proprietà.

Teorema 8.1 *Una serie e tutti i suoi resti hanno lo stesso carattere.*

Dim. Chiamiamo σ_k la somma dei primi k termini della serie. Avremo

$$S_n = \sum_{p=1}^n y_p = \sigma_k + \sum_{p=1}^{n-k} y_{k+p}.$$

Posto $y_{k+p} = \bar{y}_p$, la serie $\sum_{p=1}^{\infty} \bar{y}_p$ è il k -esimo resto della serie data ed $\bar{S}_n = \sum_{p=1}^n \bar{y}_p$ la sua somma parziale. Poiché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sigma_k + \sum_{p=1}^{n-k} \bar{y}_p \right) = \sigma_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}_n,$$

risulta che se S_n converge, convergerà anche $\bar{S}_n$ e viceversa. Lo stesso si può dire se S_n è divergente o oscillante.

Date le due serie numeriche

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n \\ t_1 + t_2 + \dots + t_n + \dots &= \sum_{n=1}^{\infty} t_n \end{aligned}$$

e due numeri reali λ, μ , la serie

$$\lambda y_1 + \mu t_1 + \lambda y_2 + \mu t_2 + \dots + \lambda y_n + \mu t_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda y_n + \mu t_n),$$

si dice *combinazione lineare* delle due serie. Si ha il seguente risultato

Teorema 8.2 *La combinazione lineare di due serie convergenti è convergente.*

Dim. Dette S'_n e S''_n le somme parziali delle due serie ed S_n la somma parziale della loro combinazione lineare, si ha

$$S_n = \sum_{k=1}^n (\lambda y_k + \mu t_k) = \lambda \sum_{k=1}^n y_k + \mu \sum_{k=1}^n t_k = \lambda S'_n + \mu S''_n.$$

Ne segue che, detti S' e S'' i limiti delle due somme parziali S'_n e S''_n , esisterà, finito, il limite S della successione S_n , e si avrà

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} S''_n = \lambda S' + \mu S''.$$

Vale la pena osservare che la combinazione lineare di due serie divergenti o oscillanti può essere convergente. Ad esempio, per $|x| < 1$, le due serie

$$\begin{aligned} 1 + 1 + \dots + 1 + \dots \\ (x - 1) + (x^2 - 1) + \dots + (x^n - 1) + \dots \end{aligned}$$

sono ambedue divergenti ma hanno per somma il primo resto della serie geometrica, che sotto le ipotesi fatte, risulta convergente.

8.2 Criteri di convergenza

Sia $\{y_n\}$ una successione numerica di Cauchy, ovvero tale che $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_\epsilon \Rightarrow |y_m - y_n| < \epsilon$. Poiché ogni successione numerica di Cauchy in $\mathbb{R}$ è convergente, e viceversa, ogni successione numerica convergente è di Cauchy, possiamo stabilire il seguente criterio di convergenza per una serie numerica.

Teorema 8.3 (*Criterio di Cauchy*) *Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sia convergente è che, fissato $\epsilon > 0$, esista un $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che per $n > n_\epsilon$ si abbia*

$$|y_{n+1} + y_{n+2} + \dots + y_{n+p}| < \epsilon, \quad (p = 0, 1, 2, \dots).$$

Dim. Osserviamo che, posto, $m = n + p$, si può scrivere, per qualunque p ,

$$|y_{n+1} + y_{n+2} + \dots + y_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n| = |S_m - S_n|.$$

Allora la condizione del teorema si traduce nella condizione che la successione delle somme parziali della serie sia una successione di Cauchy. Ma questa successione è una successione numerica e la condizione di Cauchy risulta necessaria e sufficiente per la sua convergenza.

Teorema 8.4 *Se la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge, allora $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.*

Dim. Dall'ipotesi di convergenza della serie, applicando il teorema 8.3 per $p = 0$ si ottiene che, fissato $\epsilon > 0$ esiste un n_ϵ tale che per $n > n_\epsilon$ si abbia $|y_n| < \epsilon$. Ma quest'ultima condizione equivale a dire che $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

Dal teorema precedente segue, ovviamente che, se $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$ oppure se il limite non esiste affatto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ sarà divergente o oscillante. Viceversa, il fatto che y_n sia infinitesimo non è sufficiente per affermare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge. A questo proposito consideriamo la seguente serie,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

detta *serie armonica*. In questo caso si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Tuttavia la serie diverge. Per provarlo utilizziamo il criterio di Cauchy. Posto $p = n$, abbiamo

$$y_{n+1} + \dots + y_{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ volte}} = \frac{1}{2}.$$

Poiché questa disuguaglianza vale per qualunque n , abbiamo $|S_{2n} - S_n| > \frac{1}{2}$. Scelto $\epsilon < \frac{1}{2}$, il criterio di Cauchy non è soddisfatto, quindi la serie non è convergente. Inoltre, la successione S_n risulta crescente e non può essere limitata perché altrimenti sarebbe convergente. Quindi S_n sarà divergente.

Teorema 8.5 (*Criterio del confronto*) *Siano $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ due serie a termini non negativi e tali che $y_n \leq t_n$ per ogni n . Allora la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ implica la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ e la divergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ implica la divergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$.*

Dim. Le somme parziali S_n della serie $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$, costituiscono una successione a termini non negativi, monotona non decrescente. Se $\{S_n\}$ è convergente essa sarà limitata. Dalla disuguaglianza $y_n \leq t_n$, risulta allora che $S'_n = \sum_{k=1}^n y_n \leq \sum_{k=1}^n t_n = S_n$, quindi anche S'_n è limitata, ed essendo anch'essa non decrescente, risulterà convergente.

Supponiamo ora che la successione $\{S'_n\}$ sia divergente. Allora essa non sarà limitata superiormente e, per la disuguaglianza $y_n \leq t_n$, anche $\{S_n\}$ non sarà limitata superiormente e quindi divergerà.

• Esempi

1) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + \frac{1}{n}}.$$

Osserviamo che la serie è a termini positivi e risulta $\frac{1}{2^n + \frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2^n}, \forall n$. Ma la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^n$ è il primo resto della serie geometrica di argomento $\frac{1}{2}$ ed è quindi convergente a $\frac{1}{1-1/2} - 1 = 1$. Per il criterio del confronto la serie di partenza sarà convergente.

2) Consideriamo la serie

$$1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots + \frac{1}{n^x} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

detta *serie armonica generalizzata*. Studiamo il suo carattere al variare di $x \in \mathbb{R}$. Per $x \leq 0$ si ha

$$y_n = \frac{1}{n^x} = n^{-x} \geq 1,$$

quindi $S_n \geq n$ e, utilizzando il criterio del confronto, la serie sarà divergente. Per $0 < x \leq 1$ abbiamo

$$y_n = \frac{1}{n^x} \geq \frac{1}{n},$$

e quindi, sempre per il criterio del confronto la serie diverge. In particolare, per $x = 1$ la serie coincide con la serie armonica. Consideriamo infine il caso $x > 1$. Introdotta la funzione $f(t) = \frac{1}{t^x}$ essa risulta continua e monotona non crescente per $t \geq 1$. Applicando il teorema della media all'integrale

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt$$

si ottiene

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt = \frac{1}{\xi^x} \geq \frac{1}{(n+1)^x}.$$

D'altra parte, l'integrazione diretta fornisce

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{t^x} dt = \frac{1}{x-1} \left[\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}} \right].$$

Ne segue la disuguaglianza

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{x-1} \left[\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}} \right].$$

Consideriamo la serie dei termini a destra di quest'ultima disuguaglianza, a meno del fattore $\frac{1}{x-1}$,

$$1 - \frac{1}{2^{x-1}} + \frac{1}{2^{x-1}} - \frac{1}{3^{x-1}} + \dots + \frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}} + \dots,$$

la cui somma parziale è

$$\sigma_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^{x-1}}.$$

Poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 1$, quest'ultima serie risulta convergente e, per il criterio del confronto risulta convergente anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^x}$. Ma quest'ultima non è altro che il primo resto della serie armonica generalizzata che risulta così convergente. Riassumendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \begin{cases} \text{è divergente per } x \leq 1 \\ \text{è convergente per } x > 1. \end{cases}$$

Teorema 8.6 (*Criterio del rapporto o di D'Alembert*) Sia $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ una serie a termini positivi. Se accade che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \lambda,$$

essendo $0 \leq \lambda < 1$, allora la serie è convergente. Se invece è $\lambda > 1$ la serie è divergente.

Dim. Supponiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = \lambda < 1$. Considerato un numero q tale che $\lambda < q < 1$ e posto $\epsilon = q - \lambda$, dalla definizione di limite esisterà un $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} < q, \quad \forall n > n_\epsilon.$$

Ne seguono le disequaglianze

$$y_{n+1} < qy_n, \quad y_{n+2} < qy_{n+1} < q^2y_n, \quad \dots \quad \forall n > n_\epsilon,$$

da cui

$$y_{n+1} + y_{n+2} + \dots + y_{n+l} < y_n \sum_{p=1}^l q^p.$$

Poiché la somma a secondo membro di questa disequaglianza è la somma parziale del primo resto della serie geometrica con argomento minore di uno, che è convergente, la serie

$$y_{n+1} + y_{n+2} + \dots$$

dove n è un qualunque numero intero maggiore di n_ϵ , risulterà convergente. Ma quest'ultima, è l' n -esimo resto della serie di partenza, che dunque risulterà convergente.

Supponiamo ora $\lambda > 1$. In questo caso esisterà un indice ν tale che, per $n > \nu$ si abbia $y_{n+1} > y_n$. Quindi dovrà aversi $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n > 0$ e questo implica che la serie non può essere convergente. Infine, essendo a termini positivi, la serie dovrà necessariamente divergere.

• Esempi

1) Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Applicando il criterio del rapporto otteniamo

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n},$$

il cui limite, per $n \rightarrow \infty$ è $\frac{1}{2}$. La serie è allora convergente.

2) Studiare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Applico ancora il criterio del rapporto e trovo

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, la serie risulterà divergente.

3) La serie

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

si dice *serie esponenziale*. Per $x \geq 0$ la serie risulta essere a termini non negativi. Per $x = 0$ si ha $S_n = 1$ quindi la serie è convergente. Per $x > 0$ si ha

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x^n (n-1)!}{n! x^{n-1}} = \frac{x}{n}.$$

Poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0$, ne segue che la serie esponenziale è convergente per $x \geq 0$.

4) La serie

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

è detta *serie logaritmica*. Per $x \geq 0$ essa è a termini non negativi. Poiché si ha

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{nx}{n+1},$$

ne segue $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_{n+1}}{y_n} = x$. Quindi essa è convergente per $0 \leq x < 1$ e divergente per $x > 1$. Per $x = 1$ essa coincide con la serie armonica quindi risulta divergente.

Teorema 8.7 (*criterio della radice*). Sia $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ una serie a termini non negativi. Supponiamo che esista, finito, il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{y_n} = l.$$

Allora, se risulta $0 \leq l < 1$, la serie converge, mentre se risulta $l > 1$ la serie diverge.

Dim. Dall'ipotesi, fissato $\epsilon > 0$, esisterà un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$l - \epsilon < \sqrt[n]{y_n} < l + \epsilon, \quad \text{per } n > \nu.$$

Se $0 \leq l < 1$, allora, per ϵ sufficientemente piccolo si ha $q = l + \epsilon < 1$ e quindi

$$\sqrt[n]{y_n} < q \implies y_n < q^n.$$

Poiché q^n è il generico termine di una serie geometrica di ragione minore di 1, la serie delle q^n converge, e per il criterio del confronto, convergerà anche la serie di partenza.

Se $l > 1$, sempre per un opportuno ϵ , si avrà $p = l - \epsilon > 1$, da cui

$$\sqrt[n]{y_n} > p, \implies y_n > p^n.$$

Poiché in questo caso la serie di termini p^n sarà divergente, per il teorema del confronto si avrà la divergenza della serie di partenza.

• Esempi

1) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2}.$$

Si tratta di una serie a termini non negativi. Applicando il criterio della radice si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{e} < 1.$$

Ne segue la convergenza della serie.

2) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+\frac{2}{n}}}{3^n}.$$

La serie è a termini positivi. Applicando il criterio della radice,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{5^{n+\frac{2}{n}}}{3^n}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} 5^{\frac{n+2/n}{n}} = \frac{5}{3} > 1.$$

La serie risulta dunque divergente.

OSSERVAZIONE. Come nel caso del criterio del rapporto, se $l = 1$ il criterio della radice non permette di dedurre la convergenza o la divergenza di una serie. Come esempio si consideri la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Si ha, per qualunque x ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-x/n} = 1.$$

Come sappiamo, la serie può essere convergente o divergente a seconda del valore di x ma il criterio della radice, in questo caso, non permette di stabilire il carattere della serie.

8.3 Serie alternanti e serie assolutamente convergenti

Si dice *alternante* una serie i cui termini sono alternativamente positivi e negativi. Se, per esempio, il primo termine è positivo, tutti i termini di posto dispari saranno positivi e tutti quelli di posto pari saranno negativi. Ad esempio è alternante la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Si può dimostrare che se i valori assoluti dei termini di una serie alternante formano una successione monotona, allora la serie non è divergente. Più in particolare si ha il seguente risultato

Teorema 8.8 *Data una serie alternante con $y_1 > 0$, supponiamo che la successione $\{|y_n|\}$ sia monotona decrescente e che $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. Allora la serie converge e la sua somma è un numero positivo $S \leq y_1$.*

Dim. Consideriamo le somme parziali di ordine pari S_{2n} . Si può scrivere

$$S_{2n} = (|y_1| - |y_2|) + (|y_3| - |y_4|) + \dots + (|y_{2n-1}| - |y_{2n}|).$$

Poiché $\{|y_n|\}$ è decrescente, la successione $\{S_{2n}\}$ risulta crescente. D'altra parte si può anche scrivere

$$S_{2n} = |y_1| - (|y_2| - |y_3|) - (|y_4| - |y_5|) - \dots - |y_{2n}|,$$

quindi risulta $0 < S_{2n} < y_1$ cioè $\{S_{2n}\}$ è limitata. Essa risulterà allora convergente. Denotiamo con S il suo limite.

Consideriamo ora le somme parziali di ordine dispari S_{2n+1} . Poiché si ha $S_{2n+1} = S_{2n} + y_{2n+1}$, tenuto conto dell'ipotesi $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, si ricava

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + y_{2n+1}) = S + \lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n+1} = S.$$

Si conclude allora che le somme parziali pari e le somme parziali dispari convergono allo stesso limite che è la somma della serie.

• **Esempio**

Consideriamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Poiché si ha $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots$ ed anche $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, per il teorema precedente la serie risulta convergente.

Diremo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ è *assolutamente convergente* se risulta convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$.

Teorema 8.9 *Ogni serie assolutamente convergente è convergente.*

Dim. Osserviamo che, per ogni n si ha $-|y_n| \leq y_n \leq |y_n|$, da cui $0 \leq y_n + |y_n| \leq 2|y_n|$. Per ipotesi abbiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$ è convergente e quindi lo sarà anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2|y_n|$. Per il criterio del confronto allora sarà convergente anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (y_n + |y_n|)$. D'altra parte si ha

$$S_n = \sum_{k=1}^n y_k = \sum_{k=1}^n (y_k + |y_k|) - \sum_{k=1}^n |y_k|$$

da cui, passando al limite per $n \rightarrow \infty$, $\{S_n\}$ risulterà convergente perché differenza di due successioni convergenti.

La semplice convergenza non implica l'assoluta convergenza. Per esempio, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ è convergente ma la serie dei valori assoluti $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ risulta divergente.

Per le serie assolutamente convergenti vale la disuguaglianza triangolare per somme infinite, ovvero

$$|y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots| \leq |y_1| + |y_2| + \dots + |y_n| + \dots$$

Infatti, data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ assolutamente convergente, denotate con S_n ed $\bar{S}_n$, rispettivamente le somme parziali della serie e di quella dei suoi valori assoluti, avremo

$$|S_n| \leq \bar{S}_n \quad \implies \quad -\bar{S}_n \leq S_n \leq \bar{S}_n,$$

in forza della disuguaglianza triangolare per somme finite. Passando al limite per $n \rightarrow \infty$, per la convergenza della serie e denotate con S e $\bar{S}$ rispettivamente la somma della serie e quella dei suoi valori assoluti, otteniamo

$$-\bar{S} \leq S \leq \bar{S}, \quad \implies \quad |S| \leq \bar{S},$$

che è quanto volevamo dimostrare.

Le serie assolutamente convergenti godono inoltre della proprietà di commutatività della somma. Si può dimostrare infatti che se si scambiano di posto i termini di una serie assolutamente convergente la serie risultante continua ad essere assolutamente convergente e la sua somma non cambia. Questa proprietà non vale in generale per una serie non assolutamente convergente.

• Esempio

Abbiamo già visto che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ non è assolutamente convergente ma è convergente. Chiamiamo S la sua somma. Cambiamo l'ordine degli addendi della serie in modo tale che ogni termine positivo sia seguito da due termini negativi, ovvero

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\right] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{1}{2} S. \end{aligned}$$

Per effetto del cambiamento di ordine la serie ha cambiato somma.

Capitolo 9

Serie di funzioni

Si dice *serie di funzioni* la serie

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

i cui termini sono funzioni definite in un certo intervallo A dei reali. Le serie

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}, & \quad (\text{serie geometrica}), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, & \quad (\text{serie armonica generalizzata}), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, & \quad (\text{serie esponenziale}), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, & \quad (\text{serie logaritmica}), \end{aligned}$$

già considerate nel capitolo precedente, sono esempi di serie di funzioni.

Se una serie di funzioni risulta convergente in tutti i punti di un insieme $D \subseteq A$ diremo che la serie è convergente in D . Diremo poi che $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è assolutamente convergente in D se è convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. La somma $S(x)$ di una serie di funzioni convergente in D è una funzione definita in D .

9.1 Convergenza uniforme

Sia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni, convergente in D . Si dice che la serie è *uniformemente convergente* in $\Omega \subseteq D$ se, $\forall \epsilon > 0, \exists \nu_{\epsilon} \in \mathbb{N} : \forall n > \nu_{\epsilon}, \forall x \in \Omega \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$. È importante notare che il numero ν_{ϵ} dipende qui da ϵ ma *non* da x . La convergenza uniforme implica la convergenza della serie di funzioni punto per punto in Ω . Tuttavia una serie di funzioni può essere convergente in un punto ma non essere uniformemente convergente in quel punto.

- Esempi _____

1) Verificare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{1-x^2} + n},$$

converge uniformemente in $[-1, 1]$.

Osserviamo che la serie data è alternante ed è $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+1} > 0, \forall x \in [-1, 1]$. Inoltre, la successione dei valori assoluti $\{|f_n(x)|\}$ risulta monotona decrescente per ogni $x \in [-1, 1]$ e si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. Ne segue che la serie è convergente in $[-1, 1]$. Consideriamo ora il resto n -esimo della serie data,

$$R_n(x) = (-1)^n \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}+n+1} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+n+2} + \dots \right].$$

Poiché si ha $|R_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}+n+1} < \frac{1}{n}$, detta $S(x)$ la somma della serie, risulta

$$|S_n(x) - S(x)| = |R_n(x)| < \frac{1}{n}.$$

Quindi, fissato $\epsilon > 0$ si ha $|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$ per $n > \nu_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}$, per ogni $x \in [-1, 1]$. Il numero ν_ϵ è indipendente da x quindi la serie è uniformemente convergente in $[-1, 1]$.

2) Consideriamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1}).$$

La somma parziale n -esima è

$$S_n(x) = (x - 1) + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \dots + x^n - x^{n-1} = -1 + x^n,$$

quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{per } x = 1 \end{cases}.$$

La serie è dunque convergente in $[0, 1]$. Per esaminare l'uniforme convergenza, osserviamo che, fissato un $\epsilon \in (0, 1)$ la disuguaglianza

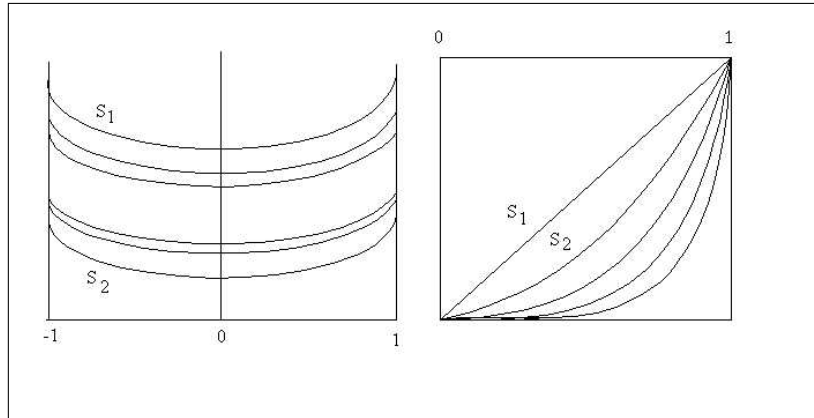
$$|S_n(x) - S(x)| \leq x^n < \epsilon, \quad \forall x \in [0, 1),$$

è soddisfatta per $n > \log_x \epsilon = \nu(\epsilon, x)$. Poiché comunque si scelga ϵ , si ha $\lim_{x \rightarrow 1^-} \log_x \epsilon = +\infty$, non esiste un ν tale che per $n > \nu$ sia soddisfatta la condizione di convergenza per ogni $x \in [0, 1]$. La serie quindi non è uniformemente convergente in $[0, 1]$. Osserviamo infine che, se ci restringiamo a considerare la serie nell'intervallo $[0, 1 - \delta]$, con $0 < \delta < 1$ allora la disuguaglianza $x^n < \epsilon$ risulta soddisfatta per

$$n > \frac{\ln \epsilon}{\ln(1 - \delta)} = \nu_\epsilon.$$

Possiamo dire allora che la serie risulta uniformemente convergente in $[0, 1 - \delta]$. A ulteriore commento dei due esempi precedenti, riportiamo in figura la rappresentazione grafica delle somme parziali delle due serie

Il seguente teorema stabilisce una condizione sufficiente per la convergenza di una serie di funzioni.



Teorema 9.1 (Criterio di Weierstrass). Data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, dove le $f_n(x)$ sono definite in D , supponiamo che per ogni $x \in \Omega \subseteq D$, con Ω chiuso, si abbia $|f_n(x)| \leq a_n$, $n = 1, 2, \dots$, e che la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sia convergente. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ risulta assolutamente e uniformemente convergente in Ω .

Dim. Dalla disuguaglianza $|f_n(x)| \leq a_n$, $n = 1, 2, \dots$, mediante il criterio del confronto, deduciamo che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ risulta convergente per ogni $x \in \Omega$ quindi la serie è assolutamente convergente in Ω . Proviamo che essa è anche uniformemente convergente. Posto $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sigma$, si ha, per ogni $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} |S_n(x) - S(x)| &= |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots| \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \dots \\ &\leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sigma - \sigma_n. \end{aligned}$$

Ne segue che, per la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \nu_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n > \nu_\epsilon \Rightarrow |\sigma_n - \sigma| < \epsilon.$$

Ma questo implica che $|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$, $\forall n > \nu_\epsilon$ indipendentemente da x . Concludiamo che la serie di funzioni è uniformemente convergente.

- Esempio

Studiare la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 + (4 - x^2)^{n/2}}.$$

I termini della serie sono funzioni definite in $[-2, 2]$. Si ha

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2 + (4 - x^2)^{n/2}} \right| = \frac{|\sin nx|}{n^2 + \sqrt{(4 - x^2)^n}} \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall n = 1, 2, \dots, \forall x \in [-2, 2].$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, per il criterio di Weierstrass la serie di funzioni converge uniformemente in $[-2, 2]$.

Le serie uniformemente convergenti godono di alcune proprietà notevoli.

Teorema 9.2 *Se si moltiplicano tutti i termini di una serie di funzioni uniformemente convergente in $[a, b]$ per una funzione $g(x)$ limitata in $[a, b]$, allora la serie risultante $\sum_{n=1}^{\infty} g(x)f_n(x)$ è uniformemente convergente in $[a, b]$.*

Dim. Poiché si suppone $g(x)$ limitata in $[a, b]$, esisterà un $C \in \mathbb{R}^+$ tale che $|g(x)| \leq C, \forall x \in [a, b]$. Si può scrivere allora

$$\left| \sum_{k=1}^n g(x)f_k(x) - g(x)S(x) \right| = |g(x)| |S_n(x) - S(x)| \leq C |S_n(x) - S(x)|, \quad \forall x \in [a, b].$$

Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente, convergerà uniformemente anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g(x)f_n(x)$ e la sua somma sarà $g(x)S(x)$, definita in $[a, b]$.

Teorema 9.3 *Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è uniformemente convergente in $[a, b]$ e i suoi termini sono funzioni continue in $[a, b]$, allora la somma della serie è una funzione continua in $[a, b]$.*

Dim. Consideriamo un punto $x_0 \in [a, b]$ ed un incremento h tale che $x_0 + h \in [a, b]$. Poiché la serie è uniformemente convergente in $[a, b]$, fissato $\epsilon > 0$ si avrà

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad |S_n(x_0 + h) - S(x_0 + h)| < \frac{\epsilon}{3},$$

per ogni $n > \nu_\epsilon \in \mathbb{N}$ indipendentemente dalla scelta di x_0 in $[a, b]$ e di h . Poiché le funzioni $f_n(x)$ sono continue, la somma parziale $S_n(x)$ sarà una funzione continua quindi, preso un qualunque n , esisterà un $\delta_\epsilon(n)$ tale che per $|h| < \delta_\epsilon(n)$ si abbia

$$|S_n(x_0 + h) - S_n(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Se scegliamo allora $n > \nu_\epsilon$ e, in corrispondenza, $|h| < \delta_\epsilon(n)$, risulterà

$$\begin{aligned} |S(x_0 + h) - S(x_0)| &= \\ |S(x_0 + h) - S_n(x_0 + h) + S_n(x_0 + h) - S_n(x_0) + S_n(x_0) - S(x_0)| &\leq \\ |S(x_0 + h) - S_n(x_0 + h)| + |S_n(x_0 + h) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)| &< \epsilon. \end{aligned}$$

Ma questa non è altro che la condizione di continuità della funzione $S(x)$ in x_0 . Poiché il risultato vale per qualunque $x_0 \in [a, b]$, la somma della serie risulta continua in tutto $[a, b]$.

Osserviamo che se viene a mancare l'ipotesi di convergenza uniforme, la semplice continuità dei termini della serie non è sufficiente a garantire la continuità della somma.

• Esempi _____

1) Consideriamo la serie precedentemente studiata

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n-1}).$$

Abbiamo già visto che questa serie non è uniformemente convergente in $[0, 1]$. Le funzioni $f_n(x) = x^n - x^{n-1}$ sono continue in $[0, 1]$ mentre la somma risulta discontinua in $x = 1$, in quanto,

$$S(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{per } x = 1. \end{cases}$$

2) Abbiamo visto che la serie armonica generalizzata $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ è convergente per $x > 1$. Preso un $\alpha > 0$, questa serie risulta uniformemente convergente per $x \geq 1 + \alpha$. Infatti si ha

$$\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}},$$

e poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ è convergente, per il criterio di Weierstrass la serie armonica generalizzata è uniformemente convergente per $x \geq 1 + \alpha$. Ne segue che la funzione

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

è continua per $x > 1$. Questa funzione è nota come *zeta di Riemann*.

Si possono dimostrare anche i seguenti teoremi che qui non dimostreremo.

Teorema 9.4 *Se la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $S(x)$ in $[a, b]$ e le funzioni $f_n(x)$ sono continue in $[a, b]$, allora la serie è integrabile termine a termine ovvero,*

$$\int_{x_0}^x S(\xi) d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x f_n(\xi) d\xi,$$

per ogni $x_0 \in [a, b]$. Inoltre la serie a secondo membro converge uniformemente in $[a, b]$.

Teorema 9.5 *Sia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ una serie convergente i cui termini sono funzioni derivabili in $[a, b]$. Supponiamo che la serie delle derivate $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ converga uniformemente in $[a, b]$. Allora la serie è derivabile termine a termine ovvero,*

$$\frac{d}{dx} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

9.2 Serie di potenze

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $c_n \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

si dice *serie di potenze* e i numeri c_n si dicono coefficienti della serie. È evidente che ogni serie di potenze converge per $x = x_0$. In tal caso infatti si ha $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0$. Mediante il cambiamento di variabile $x - x_0 = X$ si può sempre scrivere una serie di potenze nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$.

Teorema 9.6 (di Abel). *Se la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge per $x = x_1 \neq 0$, allora essa converge assolutamente per tutti gli x tali che $|x| < |x_1|$. Se essa diverge per $x = x_2$, allora essa non convergerà per tutti gli x tali che $|x| > |x_2|$.*

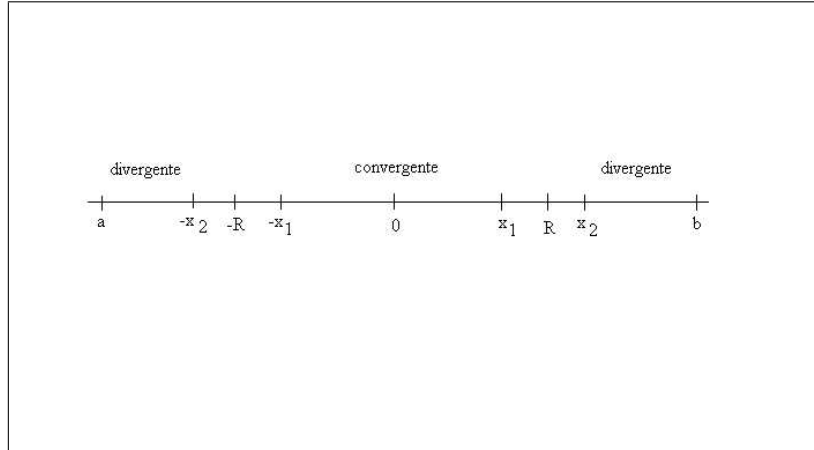
Dim. Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge in x_1 avremo necessariamente che $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n x_1^n = 0$. Ne segue che esiste un maggiorante M dei termini della serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^n$ cioè $|c_n x_1^n| \leq M, \forall n$. Scelto allora $|x| < |x_1|$ avremo

$$|c_n x^n| = |c_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \leq M q^n,$$

essendo $q = |x/x_1| < 1$. Ma il termine a secondo membro è il termine generale del primo resto di una serie geometrica di argomento minore di uno, che è convergente. Ne segue, per il criterio del confronto, che la serie data è assolutamente convergente per $|x| < |x_1|$.

Supponiamo ora che la serie di potenze diverga per $x = x_2$ e ragioniamo per assurdo. Supponiamo che per un x tale che $|x| > |x_2|$ la serie converga. Allora, per quanto dimostrato prima, essa deve convergere anche per $x = x_2$. Ma ciò contraddice l'ipotesi, quindi la serie non converge per $|x| > |x_2|$.

Il teorema di Abel ci permette di suddividere l'asse reale in intervalli di convergenza di una serie di potenze ed intervalli di divergenza. Tali intervalli sono simmetrici rispetto all'origine.



Definiamo *raggio di convergenza* di una serie di potenze, l'estremo superiore dell'insieme dei valori x_1 per i quali la serie converge e lo denoteremo con R . Diremo quindi che una serie di potenze ha raggio di convergenza R se essa converge nell'intervallo $(-R, R)$. Tale intervallo può essere chiuso o aperto a seconda che la serie converga o meno per $x = \pm R$. Se la serie converge solo per $x = 0$ allora porremo $R = 0$. Se l'insieme dei valori x_1 per i quali la serie converge non è limitato, porremo $R = \infty$. In generale l'intervallo di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ è l'intervallo aperto $(x_0 - R, x_0 + R)$ oppure l'intervallo chiuso $[x_0 - R, x_0 + R]$.

Per determinare il raggio di convergenza di una serie di potenze si può fare uso di uno dei criteri di convergenza studiati per le serie numeriche. Supponiamo per esempio, che esista e sia finito, il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = L,$$

e applichiamo il criterio del rapporto alla serie dei valori assoluti $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$. Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| |x| = L|x|,$$

da cui segue che per $|x|L < 1$ la serie converge e per $|x|L > 1$ la serie diverge. dalla definizione di raggio di convergenza si ottiene allora $R = 1/L$. Si ricava così la seguente formula per il calcolo del raggio di convergenza

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

• Esempi

1) Determinare l'intervallo di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^n$.

Calcoliamo il raggio di convergenza

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n-1} n}{(-1)^n (n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Ne segue che la serie è assolutamente convergente per $-1 < x < 1$. Studiamo ora la convergenza nei punti estremi di questo intervallo. Per $x = -1$ si ottiene la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n (-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} n = - \sum_{n=1}^{\infty} n,$$

che è palesemente divergente. Per $x = 1$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n (1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n,$$

che è una serie oscillante. Concludiamo che l'intervallo di convergenza della serie data è l'intervallo aperto $(-1, 1)$.

2) Determinare l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^n} (x+3)^n.$$

Calcoliamo R .

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) 2^{n+1}}{n 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 2.$$

Dunque la serie converge assolutamente nell'intervallo $|x+3| < 2$, ovvero per $-5 < x < -1$. Per $x = -5$ si ha la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^n} (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

che risulta divergente. Per $x = -1$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n 2^n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

che sappiamo essere una serie convergente. Ne segue che l'intervallo di convergenza della serie di partenza è $(-5, -1]$.

3) Determinare l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{n^n}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n (n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n (n+1) = +\infty. \end{aligned}$$

Ne segue che il raggio di convergenza è infinito e la serie converge in tutto $\mathbb{R}$.

4) Determinare l'intervallo di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n.$$

Poiché si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

il raggio di convergenza è zero. La serie converge allora solo per $x = 0$ e si ha $S(0) = 1$.

Facendo uso dei teoremi sulle serie di funzioni uniformemente convergenti, si può dimostrare che una serie di potenze convergente in $(x_0 - R, x_0 + R)$, converge assolutamente e uniformemente in ogni intervallo chiuso contenuto in $(x_0 - R, x_0 + R)$. Da questo risultato segue immediatamente che la somma di una serie di potenze è una funzione continua in un qualunque intervallo chiuso contenuto in $(x_0 - R, x_0 + R)$. Risulta inoltre che ogni serie di potenze è integrabile termine a termine e si ha

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}.$$

L'intervallo di convergenza $\bar{R}$ di quest'ultima serie è uguale a quello della serie di partenza, R . Infatti si ha

$$\bar{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{n+1} \frac{n+2}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = R.$$

Si può inoltre dimostrare che le serie di potenze possono essere derivate termine a termine mantenendo il proprio raggio di convergenza, ovvero

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \\ \bar{R} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n c_n}{(n+1) c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = R. \end{aligned}$$

Poiché la serie derivata è una serie di potenze con lo stesso raggio di convergenza essa può essere derivata un numero arbitrario di volte.

9.3 Serie di Taylor

Si dice che una funzione $f(x)$ è sviluppabile nella serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ nell'intervallo (x_0-R, x_0+R) se la serie di potenze converge e la sua somma è $f(x)$. Se la funzione è derivabile un numero arbitrario di volte, i coefficienti c_n dello sviluppo sono univocamente determinati da $f(x)$. Infatti, posto

$$f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots + c_n(x-x_0)^n + \dots,$$

derivando n volte si ha $f^{(n)}(x_0) = n!c_n$ da cui

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Ne segue che se $f(x)$ è sviluppabile in serie di potenze, il suo sviluppo è

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \dots$$

Sia $f(x)$ una funzione derivabile un numero arbitrario di volte in $[a, b]$ e sia $x_0 \in (a, b)$. L'espressione

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \end{aligned}$$

si dice *serie di Taylor* della funzione $f(x)$. Nel caso in cui $x_0 = 0$ questa serie prende anche il nome di *serie di MacLaurin*. Da quanto visto sinora, una funzione sviluppabile in serie di potenze ammette come sviluppo proprio la serie di Taylor. Viceversa, la serie di Taylor di una funzione $f(x)$ può non convergere a $f(x)$ e quindi può non essere lo sviluppo in serie di potenze di $f(x)$.

• Esempio

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è derivabile infinite volte in tutto $\mathbb{R}$ e si ha $f^{(n)}(0) = 0, \forall n$. La sua serie di MacLaurin è dunque

$$0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n + \dots = 0.$$

Ne segue che la funzione data non è sviluppabile in serie di Taylor.

Teorema 9.7 *Condizione sufficiente affinché una funzione $f(x)$ sia sviluppabile in serie di potenze (cioè in serie di Taylor), nell'intervallo (x_0-R, x_0+R) è che ammetta derivate di qualsiasi ordine in (x_0-R, x_0+R) e che in questo stesso intervallo tali derivate siano limitate.*

Dim. Consideriamo la formula di Taylor per la funzione $f(x)$ con resto nella forma di Lagrange

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (x_0, x).$$

La dimostrazione del teorema consiste nel provare che

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

ovvero, che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = 0.$$

Sfruttando la limitatezza delle derivate, abbiamo $|f^{(n+1)}(x)| < M, \forall n, \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ e quindi

$$\left| \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \right| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ma la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!},$$

converge in quanto è il primo resto di una serie esponenziale, quindi deve essere necessariamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Ne segue che il resto della serie è un infinitesimo per $n \rightarrow \infty$ e quindi che la serie di Taylor di $f(x)$ converge e ha per somma $f(x)$.

• Esempi

1) Serie esponenziale.

Consideriamo la funzione $f(x) = e^x$ che è definita in $\mathbb{R}$ ed ha derivate di qualunque ordine. Vogliamo studiare la sua sviluppabilità in serie di MacLaurin. Preso $R \in \mathbb{R}^+$, per $x \in [-R, R]$ si ha

$$|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^R,$$

che comporta la limitatezza delle derivate di qualunque ordine. Per il teorema 9.7 la funzione è dunque sviluppabile in serie di potenze in $[-R, R]$. Ma questo risultato vale comunque si scelga R quindi $f(x) = e^x$ è sviluppabile in serie di MacLaurin in tutto $\mathbb{R}$. Si ricava così la nota serie esponenziale,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots$$

2) Sviluppo di $\sin x$ e $\cos x$.

Consideriamo la funzione $f(x) = \sin x$ che è definita in tutto $\mathbb{R}$ ed è C^∞ . Comunque preso $R \in \mathbb{R}^+$ si ha

$$|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1, \quad \forall x \in [-R, R],$$

quindi, per il teorema 9.7 la funzione è sviluppabile in serie di MacLaurin in $[-R, R]$ e quindi in $\mathbb{R}$. Si ottiene

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

Un risultato analogo si ricava per la funzione $\cos x$ il cui sviluppo è

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

3) Serie binomiale.

Consideriamo la funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, per $x > -1$. Vogliamo esaminare la sviluppabilità di questa funzione in serie di MacLaurin. Osserviamo che, in un intorno dello zero le derivate della funzione non sono limitate. Per esempio, se scegliamo $x = -\frac{1}{2}$, le derivate di f per tale valore sono potenze di 2. Tali potenze crescono al crescere dell'ordine di derivazione in modo esponenziale. La condizione sufficiente del precedente teorema di sviluppabilità non è dunque soddisfatta. Tuttavia si può dimostrare che la funzione data è sviluppabile in serie di MacLaurin in tutto l'intervallo $(-1, 1)$.

Derivando la funzione e calcolando le derivate in $x = 0$, si ha

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= \alpha \\ f''(0) &= \alpha(\alpha-1) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(0) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1) \end{aligned}$$

La serie di MacLaurin di f è data quindi da

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

Calcoliamo il raggio di convergenza di questa serie.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{\alpha-n} \right| = 1.$$

La serie risulta quindi convergente in $(-1, 1)$. Per dimostrare che la serie converge proprio a $f(x)$ osserviamo che si ha

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x), \quad f(0) = 1,$$

In altri termini, la funzione f soddisfa un problema di Cauchy del primo ordine. È facile verificare che la somma $S(x)$ della serie, soddisfa tale problema. Infatti si ha $S(0) = 1$. Inoltre la serie è uniformemente convergente in un qualunque intervallo chiuso contenuto in $(-1, 1)$ ed è quindi derivabile termine a termine. Si ha quindi

$$S'(x) = \alpha + \alpha(\alpha-1)x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots$$

da cui

$$\begin{aligned}(1+x)S'(x) &= \alpha + \alpha(\alpha-1)x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots \\ &\quad + x \left[\alpha + \alpha(\alpha-1)x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots \right] \\ &= \alpha S(x)\end{aligned}$$

Poiché il precedente problema di Cauchy ammette una sola soluzione, concludiamo che la somma della serie coincide con la funzione $f(x)$. La funzione è dunque sviluppabile in serie di MacLaurin in tutto l'intervallo $(-1, 1)$. La serie così determinata si chiama *serie binomiale*. Essa si può porre nella forma

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad x \in (-1, 1),$$

dove i numeri $\binom{\alpha}{n}$, detti *coefficienti binomiali*, sono definiti da

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad \binom{\alpha}{0} = 1,$$

4) Serie logaritmica.

Consideriamo la serie binomiale per $\alpha = -1$. Otteniamo lo sviluppo

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

Integrando ambo i membri ricaviamo

$$\int_0^x \frac{d\xi}{1+\xi} = \int_0^x (1 - \xi + \xi^2 - \xi^3 + \dots + (-1)^n \xi^n + \dots) d\xi,$$

da cui, per l'integrabilità termine a termine, otteniamo lo sviluppo

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

che risulta valido per $x \in (-1, 1)$.

Testi per l'esercitazione e l'approfondimento

- [1] L. Recine, M. Romeo, *Esercizi di Analisi Matematica (vol. 2)*, Maggioli (2011).
- [2] M. Bertsch, R. Dal Passo, L. Giacomelli, *Analisi Matematica*, McGraw-Hill (2011).
- [3] E. Giusti, *Analisi Matematica 2*, Terza edizione, Bollati Boringhieri (2003).
- [4] V. Zorich, *Mathematical Analysis II*, Springer (2004).
- [5] A. Jeffrey, *Advanced Engineering Mathematics*, Academic Press (2002).