

Capitolo 11

Funzioni integrabili

11.1 Definizione di integrale

Sia $f(x)$ definita in $[a, b]$ e ivi limitata. Consideriamo una *partizione* P di $[a, b]$, ovvero una suddivisione di $[a, b]$ in n intervalli chiusi

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n],$$

dove $x_0 = a$, $x_n = b$. Definiamo

$$m_i = \inf\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i = \sup\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Definiamo *somme integrali inferiore e superiore* relative alla partizione P , le quantità

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}), \quad S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Se la funzione è non negativa in $[a, b]$, le quantità s ed S rappresentano rispettivamente l'area del plurirettangolo inscritto e del plurirettangolo circoscritto al trapezoide di f cioè alla figura piana compresa tra l'intervallo $[a, b]$ e il grafico di f in $[a, b]$. In ogni caso, posto

$$m = \inf\{f(x), x \in [a, b]\}, \quad M = \sup\{f(x), x \in [a, b]\},$$

si ha

$$m(b-a) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq M(b-a),$$

per qualunque partizione P . Si possono realizzare diverse partizioni cambiando il numero di suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$. Questo si può fare, per esempio, suddividendo ulteriormente gli intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ ottenendo così un "raffinamento" della partizione P con un n più grande. Se P' è una partizione più "raffinata" della partizione P , si avrà

$$s(f, P') \geq s(f, P), \quad S(f, P') \leq S(f, P).$$

Consideriamo allora l'insieme di tutte le s e l'insieme di tutte le S al variare di tutte le possibili partizioni P . Si avrà

$$\sup_P [s(f, P)] \leq \inf_P [S(f, P)].$$

Si dice che $f(x)$ è *integrabile* in $[a, b]$ se

$$\sup_P [s(f, P)] = \inf_P [S(f, P)] = I,$$

e si pone

$$I = \int_a^b f(x) dx,$$

che si legge "integrale definito di f tra a e b ".

Ritorniamo ora alla costruzione di partenza e modifichiamola scambiando a con b , ovvero ponendo $x_0 = b$ e $x_n = a$ e riscrivendo la suddivisione negli n intervalli

$$[x_n, x_{n-1}], [x_{n-1}, x_{n-2}], \dots, [x_1, x_0].$$

Con le stesse definizioni date, le somme integrali s ed S cambiano ora di segno e tutte le disuguaglianze precedenti cambiano verso. Lasciando invariata la definizione di integrabilità, scriveremo

$$\sup_P [s(f, P)] = \inf_P [S(f, P)] = I',$$

e porremo

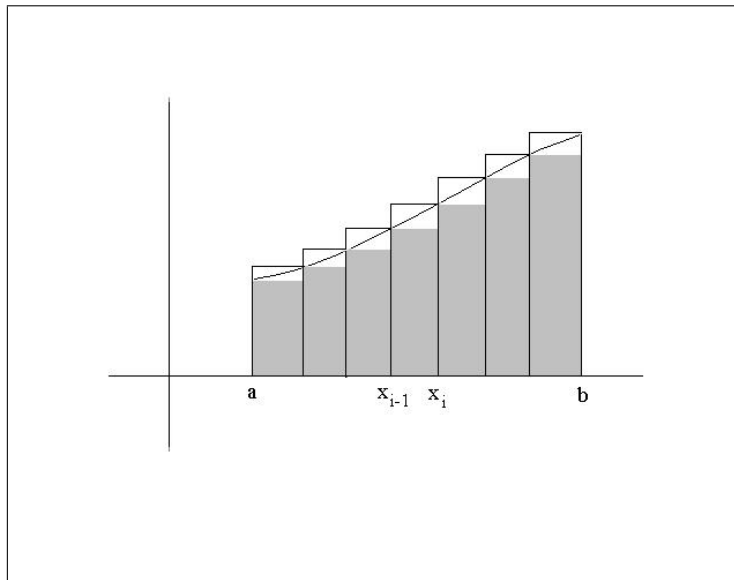
$$I' = \int_b^a f(x) dx,$$

Tenuto conto delle due costruzioni e delle posizioni fatte avremo $I' = -I$, ovvero

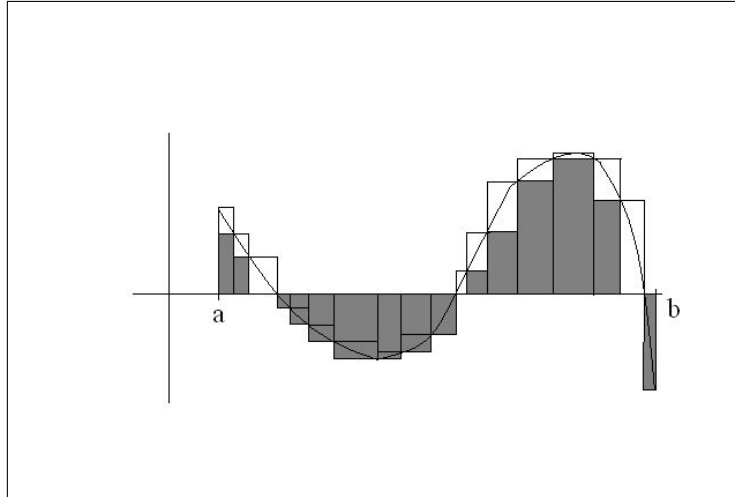
$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Osserviamo inoltre che per ogni funzione f definita in un punto a si ha $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Per quanto riguarda il significato geometrico dell'integrale definito si può dire che, se la funzione f è non negativa in $[a, b]$, esso rappresenta l'area del trapezoide di f relativo all'intervallo $[a, b]$.



Se invece la funzione cambia segno, una o più volte in (a, b) , l'integrale definito di f è dato dalla somma algebrica delle aree dei trapezoidi del semipiano $y > 0$ prese con segno positivo e delle aree dei trapezoidi del semipiano $y < 0$ prese con segno negativo.



• Esempi

1) Sia $f(x) = k$ con $k \in \mathbb{R}$. Verifichiamo che f è integrabile in un qualunque intervallo $(a, b) \subset \mathbb{R}$. In tal caso si ha $m_i = M_i = k$ per ogni sottointervallo di (a, b) relativo ad una qualunque partizione P . Ne segue

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^N k(x_i - x_{i-1}) = k \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) = k(b - a),$$

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^N k(x_i - x_{i-1}) = k \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) = k(b - a),$$

per una qualunque partizione. Quindi

$$\int_a^b k \, dx = \sup_P [s(f, P)] = \inf_P [S(f, P)] = k(b - a).$$

2) Verifichiamo che la funzione $f(x) = x$ è integrabile in $[0, 1]$. Consideriamo la partizione P_n che divide l'intervallo $[0, 1]$ in n parti uguali. Si ha

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right], \quad m_i = \frac{i-1}{n}, \quad M_i = \frac{i}{n}, \quad i = 1, \dots, n$$

Si ottiene allora

$$s(f, P_n) = \sum_{i=1}^n m_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) = \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n}$$

$$S(f, P_n) = \sum_{i=1}^n M_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Calcolando allora il sup di s e l'inf di S , si ha

$$\sup_{P_n} [s(f, P_n)] = \inf_{P_n} [S(f, P_n)] = \frac{1}{2}$$

Ne segue che $f(x) = x$ è integrabile in $[0, 1]$ e si ha

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$$

Come già osservato, per l'integrabilità di una funzione non è necessario richiederne la continuità. Ci si può allora chiedere quali condizioni risultano sufficienti per l'integrabilità.

11.2 Condizioni sull'integrabilità

La condizione di integrabilità data nella definizione dell'integrale definito $\int_a^b f(x) dx$, può essere tradotta in una forma più comoda per gli scopi successivi.

Teorema 11.1 *Data una funzione $f(x)$ limitata in $[a, b]$, condizione necessaria e sufficiente affinché sia integrabile in $[a, b]$ è che, fissato un $\varepsilon > 0$, esista una partizione $\bar{P}$ di $[a, b]$ tale che*

$$S(f, \bar{P}) - s(f, \bar{P}) < \varepsilon.$$

Dim. Condizione necessaria. Supponiamo che $f(x)$ sia integrabile in $[a, b]$. Per definizione, avremo

$$\sup_P [s(f, P)] = \inf_P [S(f, P)].$$

Per le proprietà del sup e dell'inf, fissato un $\varepsilon > 0$, è sempre possibile trovare un P_1 ed un P_2 tali che

$$\begin{aligned} S(f, P_2) &< \inf_P [S(f, P)] + \frac{\varepsilon}{2}, \\ s(f, P_1) &> \sup_P [s(f, P)] - \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro le ultime due disequaglianze si ottiene

$$S(f, P_2) - s(f, P_1) < \varepsilon.$$

Presa allora una partizione $\bar{P}$, più "raffinata" sia di P_1 che di P_2 , essendo

$$S(f, \bar{P}) \leq S(f, P_2), \quad s(f, \bar{P}) \geq s(f, P_1),$$

ne segue la tesi.

Condizione sufficiente. Supponiamo che, fissato $\varepsilon > 0$ si abbia $S(f, \bar{P}) - s(f, \bar{P}) < \varepsilon$, per una certa partizione $\bar{P}$. Poiché si ha

$$\inf_P [S(f, P)] \leq S(f, \bar{P}), \quad \sup_P [s(f, P)] \geq s(f, \bar{P}),$$

ne segue che

$$\inf_P [S(f, P)] - \sup_P [s(f, P)] < \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε si ottiene allora che $\inf_P [S(f, P)] = \sup_P [s(f, P)]$, quindi la funzione è integrabile in $[a, b]$.

Dal precedente teorema si possono dedurre alcune condizioni sufficienti per l'integrabilità di una funzione.

Teorema 11.2 *Ogni funzione monotona in un intervallo chiuso $[a, b]$ è integrabile in $[a, b]$.*

Dim. Supponiamo, per fissare le idee, che la funzione sia non decrescente in $[a, b]$ e fissiamo un $\varepsilon > 0$. Presa una partizione P di $[a, b]$, per ogni $i = 1, \dots, n$, si avrà $f(x_{i-1}) = m_i, f(x_i) = M_i$, quindi

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \delta \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \leq \delta[f(b) - f(a)].$$

dove δ è l'ampiezza del più grande intervallo della partizione P . Ovviamente, se fosse $f(b) = f(a)$, il teorema risulterebbe provato. Se $f(b) > f(a)$, allora la tesi si ottiene scegliendo una partizione P tale che

$$\delta < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Teorema 11.3 *Ogni funzione continua in un intervallo chiuso $[a, b]$, è integrabile in $[a, b]$.*

Dim. Per la continuità della funzione in ogni sottointervallo chiuso di una partizione di $[a, b]$, essa ammetterà massimi M_i e minimi m_i in ciascun sottointervallo ovvero esisteranno x_i^M e x_i^m in $[x_{i-1}, x_i]$ tali che $f(x_i^M) = M_i$ e $f(x_i^m) = m_i$. D'altra parte, sempre per la continuità di f si avrà

$$M_i - m_i = f(x_i^M) - f(x_i^m) < \varepsilon \quad \text{per} \quad |x_i - x_{i-1}| < \delta.$$

Ne segue che per una partizione $\bar{P}$ tale che $|x_i - x_{i-1}| < \delta$ ($i = 1, \dots, n$) si avrà

$$S(f, \bar{P}) - s(f, \bar{P}) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^n \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a).$$

poiché $\varepsilon(b - a)$ può essere reso piccolo quanto si vuole, si ottiene l'integrabilità di f in base al teorema 11.1.

Introduciamo ora una ulteriore forma della condizione di integrabilità. Definiamo una nuova somma integrale

$$\sigma(f, P) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

dove ξ_i è un generico punto del sottointervallo $[x_{i-1}, x_i]$ della partizione P . Poniamo

$$\delta(P) = \max\{(x_i - x_{i-1}), i = 1, \dots, n\}$$

e osserviamo che, per ogni raffinamento P' della partizione P , si ha $\delta(P') < \delta(P)$. Poiché $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ ($i = 1, \dots, n$) e tenuto conto delle proprietà del sup e dell'inf (vedi dimostrazione del teorema 11.1), fissato $\varepsilon > 0$, esisterà una partizione $\bar{P}$ tale che

$$\sup_P s(f, P) - \varepsilon < s(f, \bar{P}) \leq \sigma(f, \bar{P}) < S(f, \bar{P}) < \inf_P S(f, P) + \varepsilon.$$

Queste disuguaglianze valgono inoltre per ogni raffinamento P di $\bar{P}$ e quindi, per $0 < \delta(P) < \delta(\bar{P})$, si ha

$$\begin{aligned} \sigma(f, P) - \inf_P S(f, P) &< \varepsilon, \\ \sigma(f, P) - \sup_P s(f, P) &> -\varepsilon. \end{aligned}$$

Ora, se f fosse integrabile nel senso della definizione data al paragrafo 11.1, si avrebbe

$$|\sigma(f, P) - I| < \varepsilon \quad \text{per } 0 < \delta < \bar{\delta},$$

dove abbiamo usato le abbreviazioni $\delta(P) = \delta$ e $\delta(\bar{P}) = \bar{\delta}$. Ma quest'ultima disuguaglianza corrisponde alla definizione del limite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma(f, P) = I.$$

Viceversa, se esistesse il limite di $\sigma(f, P)$ per $\delta \rightarrow 0$, allora a causa dell'arbitrarietà di ξ_i in $[x_{i-1}, x_i]$, tale limite coinciderebbe coi limiti di s e S per $\delta \rightarrow 0$ e si avrebbe contemporaneamente

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} S(f, P) - \inf_P S(f, P) < \varepsilon, \quad \sup_P s(f, P) - \lim_{\delta \rightarrow 0} s(f, P) < \varepsilon,$$

da cui

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma(f, P) = \inf_P S(f, P) = \sup_P s(f, P).$$

In definitiva, l'integrabilità di f in $[a, b]$ risulta equivalente all'esistenza del limite della somma integrale σ quando $\delta \rightarrow 0$ e si ha

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma(f, P) = \int_a^b f(x) dx.$$

11.3 Proprietà dell'integrale

In base alla definizione, e agli ultimi risultati del paragrafo precedente si possono dimostrare alcune proprietà fondamentali dell'integrale definito.

a) ADDITIVITÀ RISPETTO ALL'INTERVALLO DI INTEGRAZIONE.

Consideriamo una funzione f limitata in $[a, b]$ e sia c un punto interno all'intervallo $[a, b]$. Supponendo che f sia integrabile in $[a, c]$ e in $[c, b]$, essa risulterà integrabile in $[a, b]$ e si avrà

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Per dimostrare questa proprietà possiamo operare una partizione P di $[a, b]$ in modo tale che $[a, c]$ sia suddiviso in p intervalli e $[c, b]$ in $n - p$ intervalli ($n > p$). Utilizzando la condizione di integrabilità trovata alla fine del paragrafo precedente, abbiamo

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^p f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \int_c^b f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=p+1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\sum_{i=1}^p f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=p+1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right] \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

b) LINEARITÀ

Se f e g sono due funzioni integrabili in $[a, b]$, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la funzione $\alpha f + \beta g$ risulta integrabile in $[a, b]$ e si ha

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Osserviamo infatti che per le proprietà dei limiti,

$$\begin{aligned} \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx &= \alpha \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \beta \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)] (x_i - x_{i-1}) = \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx. \end{aligned}$$

c) DISUGUAGLIANZE

1. Siano f e g due funzioni integrabili in $[a, b]$ e tali che $f(x) \leq g(x)$ in $[a, b]$. Allora

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

La dimostrazione segue immediatamente dal fatto che, per una qualunque partizione di $[a, b]$,

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n g(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

da cui, passando al limite per $\delta \rightarrow 0$ si ha la disuguaglianza richiesta.

2. Sia f integrabile in $[a, b]$. Allora

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq K(b-a)$$

essendo K un opportuno numero reale positivo. Per la dimostrazione partiamo dalla disuguaglianza $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. Utilizzando la disuguaglianza al punto 1 e la proprietà b) si ha

$$\int_a^b (-|f(x)|) dx = - \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

da cui

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Inoltre, essendo f limitata, esiste un $K \in \mathbb{R}^{++}$ tale che $|f(x)| \leq K$ in $[a, b]$, quindi, sempre applicando la disuguaglianza al punto 1, otteniamo

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b K dx = K(b-a).$$

Facendo uso delle disuguaglianze $m(b-a) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq M(b-a)$, si ottiene

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a), \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

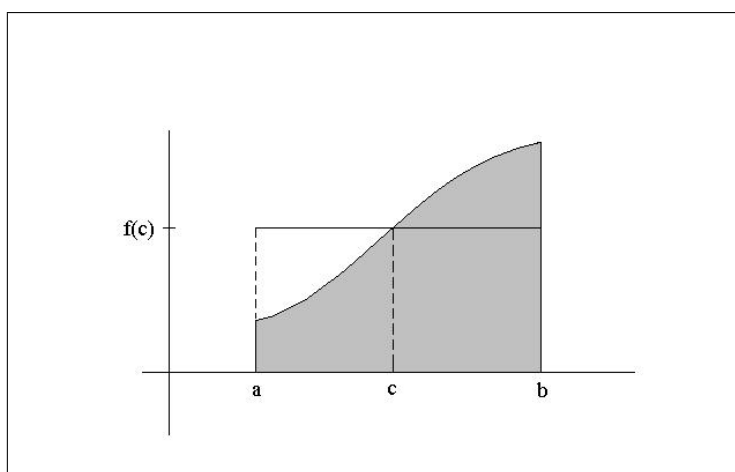
Quest'ultima disuguaglianza ci permette di dimostrare il seguente risultato.

Teorema 11.4 (*Teorema della media*). Sia f una funzione continua in $[a, b]$. Allora esiste un punto $c \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b - a)f(c).$$

Dim. Notiamo innanzitutto che, essendo f continua in un intervallo chiuso, essa è ivi integrabile. Inoltre, sempre per la continuità di f , il teorema di Weierstrass ci assicura che esistono il massimo M e il minimo m di f in $[a, b]$. Allora per il teorema dei valori intermedi, dalla precedente disuguaglianza si ottiene che esiste un punto c in $[a, b]$ tale che

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx = f(c).$$



Dal punto di vista geometrico, il teorema della media può essere interpretato dicendo che l'area sottostante al grafico di una funzione non negativa in un intervallo $[a, b]$ è uguale all'area del rettangolo avente come base l'ampiezza $(b - a)$ dell'intervallo stesso e come altezza il valore della funzione in un opportuno punto interno ad $[a, b]$ (vedi figura).

Quanto detto sinora può essere utile per stimare il valore di un integrale definito.

- Esempio _____

Vogliamo dare una stima dell'integrale definito

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x} \, dx.$$

La funzione sotto il segno di integrale è continua in $[0, \pi/2]$ e poiché $0 \leq \sin^2 x \leq 1$, essa è compresa tra 1 e $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Si ha allora

$$\frac{\pi}{2} < I < \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Osserviamo che si può sempre dare una stima più accurata di I effettuando una partizione dell'intervallo $[0, \pi/2]$ in due o più intervalli e tenendo conto del fatto che all'aumentare degli

intervalli si raffina la partizione ed i valori approssimati per difetto o per eccesso si avvicinano sempre di più al valore esatto dell'integrale. Nel caso presente, per esempio, sfruttando il fatto che la funzione data è crescente in $[0, \pi/2]$ e che se ne conoscono i valori in $0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$ si ha

$$\sum_{i=1}^3 f\left((i-1)\frac{\pi}{6}\right) \frac{\pi}{6} < I < \sum_{i=1}^3 f\left(i\frac{\pi}{6}\right) \frac{\pi}{6},$$

ottenendo così la stima più accurata,

$$\left(1 + \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}}\right) \frac{\pi}{6} < I < \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right) \frac{\pi}{6}.$$

11.4 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Data una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, limitata e integrabile, definiamo una funzione $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, nel modo seguente,

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Questa funzione, detta *funzione integrale*, risulta essere continua in tutto $[a, b]$. Per dimostrare questo fatto, sfruttiamo la limitatezza di f . Esiste quindi un $K > 0$ tale che

$$|f(x)| \leq K \quad \forall x \in [a, b].$$

Facendo uso delle proprietà mostrate nel precedente paragrafo, preso un $x_0 \in [a, b]$, si ha

$$\begin{aligned} |F(x_0) - F(x)| &= \left| \int_a^{x_0} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| = \left| \int_x^{x_0} f(t) dt \right| \leq \\ &\left| \int_x^{x_0} |f(t)| dt \right| \leq \left| \int_x^{x_0} K dt \right| = K|x_0 - x|. \end{aligned}$$

Ne segue che, fissato un $\varepsilon > 0$ si ha $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$ per ogni x tale da soddisfare la disuguaglianza $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{K}$. Ciò implica la continuità di F in x_0 e quindi, in $[a, b]$.

Vale la pena notare che la funzione integrale è continua anche se la funzione f con cui è costruita non lo è.

• Esempio

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in [-1, 0) \\ 4 & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Calcoliamo la funzione integrale

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt.$$

Per $x < 0$ si ha

$$\int_{-1}^x 2 dt = 2(x + 1) = 2x + 2.$$

Per $x > 0$, ricordando le proprietà dell'integrale, si ha

$$\int_{-1}^x f(t) dt = \int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = 2 + 4x,$$

dove si è fatto uso del risultato dell'esempio del paragrafo precedente sull'integrazione di una costante. In definitiva, otteniamo

$$F(x) = \begin{cases} 2x + 2 & x \in [-1, 0) \\ 4x + 2 & x \in [0, 1], \end{cases}$$

la quale risulta chiaramente continua in $[-1, 1]$. Si può notare che questa funzione non è però derivabile in $x = 0$.

Si definisce *primitiva* di una funzione f , definita in $[a, b]$, ogni funzione $\phi(x)$ tale che la sua derivata coincida con f in $[a, b]$, ovvero

$$\phi'(x) = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Una funzione possiede più di una primitiva in quanto, se $\phi(x)$ è una primitiva di $f(x)$ allora ogni funzione del tipo $\phi(x) + c$, con c costante, è ancora una primitiva di $f(x)$.

Teorema 11.5 *Data una funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ è derivabile in tutto $[a, b]$ e si ha*

$$F'(x) = f(x),$$

cioè F è una primitiva di f .

Dim. Considerato un punto x_0 interno ad $[a, b]$ prendiamo un incremento h di x_0 e consideriamo il rapporto incrementale della funzione integrale F . Per definizione e per le proprietà degli integrali avremo,

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt.$$

Applicando ora il teorema della media alla funzione f nell'intervallo $[x_0, x_0 + h]$, possiamo trovare un punto $\bar{x} \in [x_0, x_0 + h]$, tale che

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = f(\bar{x}).$$

Al tendere di h a zero, il punto $\bar{x}$ tende a x_0 . Sostituendo allora l'ultimo risultato nell'espressione del rapporto incrementale di F e passando al limite per $h \rightarrow 0$, otteniamo

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} f(\bar{x}) = f(x_0),$$

dove, nell'ultima eguaglianza abbiamo fatto uso della continuità della f .

Questo risultato vale anche se x_0 coincide con a o con b , purchè si scelga rispettivamente $h > 0$ oppure $h < 0$ e quindi si consideri la derivata destra o sinistra di F . Ne segue $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Da questo teorema, detto anche teorema fondamentale del calcolo integrale, segue il

COROLLARIO. Data $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e detta ϕ una sua primitiva, si ha

$$F(x) = \phi(x) - \phi(a),$$

dove F è la funzione integrale di f .

Dim. Siccome sia F che ϕ sono funzioni primitive di f esse differiranno per una costante additiva, ovvero $F(x) = \phi(x) + c$. Poiché si ha $F(a) = 0$, ne segue allora $c = -\phi(a)$ e quindi la tesi.

Come conseguenza del precedente corollario, ponendo $x = b$, si ottiene la seguente *formula fondamentale del calcolo integrale*,

$$\int_a^b f(t) dt = \phi(b) - \phi(a).$$

L'importanza di questa formula risiede nel fatto che l'integrale definito esteso all'intervallo $[a, b]$ della funzione f risulta essere uguale alla differenza tra i valori assunti in b e in a da una qualunque primitiva di f . Si potrebbe dimostrare inoltre che tale formula vale anche nel caso in cui la funzione f abbia un numero finito di punti di discontinuità eliminabili in $[a, b]$. In tal caso l'integrale di f tra a e b equivale all'integrale tra a e b della funzione continua che coincide con f laddove f è continua.

11.5 Calcolo diretto di integrali

Diciamo *integrale indefinito* della funzione f , definita e continua in un dato intervallo, l'insieme di tutte le sue primitive e lo indichiamo con la scrittura

$$\int f(x) dx.$$

La funzione f si dirà funzione integranda. Poiché la funzione integrale di f è una primitiva di f , e dato che tutte le primitive differiscono tra di loro per una costante, si ha

$$\int f(x) dx = \{F(x) + c, c = \text{cost}\}.$$

Nel seguito, a secondo membro di questa formula scriveremo più semplicemente $F(x) + c$. Notiamo che, essendo F una primitiva di f , il differenziale dell'integrale indefinito di f è dato da

$$d \int f(x) dx = f(x) dx.$$

Inoltre si ha

$$\int f'(x) dx = \{f(x) + c, c = \text{cost}\}$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si conclude che il calcolo dell'integrale definito di f si può ricondurre alla determinazione dell'integrale indefinito di f , ovvero alla determinazione di una primitiva di f . Non sempre è possibile trovare la primitiva di una funzione, anche se continua, o esprimere tale primitiva in termini di funzioni elementari. Esistono tuttavia alcune tecniche che consentono di determinare l'integrale indefinito di una funzione, a partire dal fatto che l'operazione di ricerca di una primitiva risulta essere l'operazione inversa della derivazione. A tale proposito si

possono subito stabilire le seguenti formule,

$$\begin{aligned}\int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq -1, \\ \int \frac{1}{x} dx &= \begin{cases} \ln x + c_1 & x > 0 \\ \ln(-x) + c_2 & x < 0 \end{cases} \\ \int \sin x dx &= -\cos x + c, \quad \int \cos x dx = \sin x + c, \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + c, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c, \\ \int e^x dx &= e^x + c, \quad \int a^x dx = a^x \log_a e + c, \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + c, \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + c.\end{aligned}$$

Le proprietà dell'integrale definito mostrate nel paragrafo 11.2 sono naturalmente valide anche per l'integrale indefinito. Esse si possono qui rivedere come conseguenze delle corrispondenti proprietà sulle funzioni derivabili.

• Esempi

Mediante un calcolo diretto si ha,

$$\begin{aligned}\int \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx &= \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + c, \\ \int \left(e^{2x} - \frac{2}{x} + 8\sin x \right) dx &= \frac{1}{2}e^{2x} - 2\ln|x| - 8\cos x + c.\end{aligned}$$

Dai precedenti risultati, fatta salva la continuità della $f'(x)$, si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln|f(x)| + c, \quad f(x) \neq 0, \\ \int [f(x)]^\alpha f'(x) dx &= \frac{1}{\alpha+1}[f(x)]^{\alpha+1} + c, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq -1, \\ \int \exp[f(x)] f'(x) dx &= \exp[f(x)] + c, \quad \int \sin[f(x)] f'(x) dx = -\cos[f(x)] + c, \\ \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx &= \arcsin[f(x)] + c, \quad \int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = \arctan[f(x)] + c.\end{aligned}$$

• Esempi

Calcoliamo i seguenti integrali indefiniti,

$$\int \frac{6}{\sin^2(2x)} dx = -3\cot(2x) + c,$$

$$\int \frac{8x}{1+(x^2-1)^2} dx = 4 \arctan(x^2-1) + c,$$

$$\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c.$$

11.6 Integrazione per parti

Consideriamo la derivata di un prodotto di funzioni f e g aventi derivate prime continue.

$$D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Prendendo l'integrale indefinito di ambo i membri, otteniamo

$$f(x)g(x) + c = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx,$$

da cui si ricava la seguente formula,

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx,$$

utile quando l'integrando può essere visto come il prodotto di un fattore finito (f) e di un fattore derivato (g').

- Esempi

Calcoliamo i seguenti integrali

$$a) \int \ln x dx,$$

$$b) \int \cos^2 x dx$$

$$c) \int x e^x dx.$$

Nel caso $a)$ si può considerare $\ln x$ come il fattore finito e 1 come il fattore derivato (la derivata di x). Si ha allora

$$\int \ln x \cdot 1 dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - x + c.$$

Nel caso $b)$ il fattore finito è $\cos x$ ed il fattore derivato $\cos x$. Si ha

$$\int \cos x \cos x dx = \cos x \sin x + \int \sin^2 x dx.$$

A questo punto, scrivendo $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ nell'integrale a secondo membro, si ottiene

$$2 \int \cos^2 x dx = \cos x \sin x + x, \quad \Rightarrow \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(\cos x \sin x + x) + c.$$

Nel caso $c)$ x è il fattore finito e e^x il fattore derivato. Si ha

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + c.$$

In modo analogo si calcolano i seguenti integrali indefiniti

$$\begin{aligned} a) & \int e^x \sin x \, dx, \\ b) & \int \arcsin^2 x \, dx, \\ c) & \int x^m e^x \, dx. \end{aligned}$$

Nel caso a),

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx,$$

e integrando ancora per parti,

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx,$$

da cui,

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c.$$

Nel caso b),

$$\int \arcsin^2 x \, dx = x \arcsin^2 x - \int \frac{2x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx,$$

e integrando ancora per parti,

$$\begin{aligned} \int \arcsin^2 x \, dx &= x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2 \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + c. \end{aligned}$$

Nel caso c),

$$\int x^m e^x \, dx = x^m e^x - m \int x^{m-1} e^x \, dx.$$

Effettuando altre $m-1$ integrazioni per parti, si ottiene

$$\int x^m e^x \, dx = e^x (x^m - mx^{m-1} + m(m-1)x^{m-2} - \dots + (-1)^m m!) + c.$$

11.7 Integrazione per sostituzione

Sia g una funzione con derivata continua definita in un intervallo reale e sia f una funzione continua, definita in un sottoinsieme dell'immagine di g . Detta F una primitiva di f , si ha

$$\int f(g(t))g'(t) \, dt = F(g(t)) + c.$$

Infatti differenziando la funzione composta $F(g(t))$ si ottiene

$$dF(g(t)) = F'(g(t))g'(t) \, dt = f(g(t))g'(t) \, dt.$$

Questa formula consente di usare una tecnica di sostituzione per il calcolo integrale. Supponiamo di non saper calcolare l'integrale $\int f(x) dx$. Se, posto $x = g(t)$, con g invertibile, sappiamo calcolare l'integrale $\int f(g(t))g'(t) dt$, otteniamo la primitiva $F(g(t))$, che, ritornando alla variabile x , non è altro che la primitiva $F(x)$ della funzione $f(x)$.

• Esempi

1) Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \tan x \, dx.$$

Scrivendo l'integrale nella forma

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx,$$

poniamo $\cos x = t$. Otteniamo

$$\int \tan x \, dx = - \int \frac{1}{t} \, dt = - \ln |t| + c = - \ln |\cos x| + c.$$

2) Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \sqrt{9 - x^2} \, dx.$$

Posto $x = 3 \sin t$, si ha $dx = 3 \cos t \, dt$. Effettuando la sostituzione, otteniamo allora

$$\begin{aligned} \int \sqrt{9 - x^2} \, dx &= \int \sqrt{9 - 9 \sin^2 t} \, 3 \cos t \, dt \\ &= 9 \int \cos^2 t \, dt = \frac{9}{2} (t + \sin t \cos t) = \frac{9}{2} \left(\arcsin \frac{x}{3} + \frac{x}{3} \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} \right) + c. \end{aligned}$$

dove si è usato un risultato ottenuto nel par 11.6.

3) Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{2}{1 + e^x} \, dx.$$

Effettuando la sostituzione $e^x = t$ si ha $x = \ln t$, $dx = \frac{1}{t} dt$, quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{1 + e^x} \, dx &= 2 \int \frac{1}{t(1 + t)} \, dt = 2 \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1 + t} \right) \, dt \\ &= 2 \ln |t| - 2 \ln |1 + t| = \ln \frac{e^{2x}}{(1 + e^x)^2} + c. \end{aligned}$$

11.8 Integrazione di funzioni razionali

Vogliamo calcolare l'integrale indefinito di una funzione razionale, ovvero del rapporto tra due polinomi $N(x)$ e $D(x)$. Notiamo che, se $N(x)$ è di grado superiore a $D(x)$, si può sempre scrivere

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)},$$

dove $Q(x)$ è il polinomio quoziente tra N e D , e $R(x)$ è un polinomio di grado inferiore a quello di $D(x)$. Poiché l'integrazione del polinomio $Q(x)$ è elementare, ci occuperemo qui dell'integrazione della funzione razionale $R(x)/D(x)$. Da quanto visto al paragrafo 3.5 sappiamo che se il polinomio $D(x)$ si fattorizza come

$$D(x) = (x - a_1)^{r_1} (x - a_2)^{r_2} \dots (x - a_n)^{r_n} \\ \times (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{s_2} \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m},$$

dove a_i , r_i , ($i = 1, \dots, n$) sono rispettivamente gli zeri reali di $D(x)$ e le loro molteplicità mentre i fattori $x^2 + p_ix + q_i$, con $p_i^2 - 4q_i < 0$, ($i = 1, \dots, m$) tengono conto degli zeri complessi di $D(x)$ con molteplicità s_i , allora la funzione razionale $R(x)/D(x)$ può essere scomposta nella seguente forma

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{D(x)} = & \frac{A_{11}}{x - a_1} + \frac{A_{12}}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1r_1}}{(x - a_1)^{r_1}} + \dots \\ & + \frac{A_{n1}}{x - a_n} + \frac{A_{n2}}{(x - a_n)^2} + \dots + \frac{A_{nr_n}}{(x - a_n)^{r_n}} \\ & + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{B_{1s_1}x + C_{1s_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}} \\ & + \dots + \frac{B_{ms_m}x + C_{ms_m}}{(x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}}, \end{aligned}$$

dove i coefficienti A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} sono costanti. Il calcolo dell'integrale indefinito di R/D richiede allora, oltre a integrazioni elementari, l'integrazione di funzioni del tipo

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n}.$$

Consideriamo preliminarmente il caso in cui l'esponente n è uguale a 1. Poiché si può scrivere

$$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q} = \frac{A}{2} \frac{2x + p}{x^2 + px + q} + \frac{B - \frac{Ap}{2}}{x^2 + px + q},$$

la funzione di partenza si riduce alla somma di una funzione immediatamente integrabile, in quanto

$$\int \frac{A}{2} \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \ln(x^2 + px + q),$$

e di una funzione riscrivibile come

$$\frac{B - \frac{Ap}{2}}{(q - p^2/4) \left[1 + \frac{(x+p/2)^2}{q - p^2/4} \right]}.$$

Posto allora

$$u = \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \int \frac{B - \frac{Ap}{2}}{(q - p^2/4) \left[1 + \frac{(x+p/2)^2}{q-p^2/4} \right]} dx &= \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \int \frac{1}{1 + u^2} du \\ &= \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}. \end{aligned}$$

L'integrale della funzione

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n},$$

con $n > 1$ si effettua in modo analogo. Si ottiene, preliminarmente,

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} dx = \frac{A}{2(1-n)}(x^2 + px + q)^{1-n} + \frac{2B - Ap}{(4q - p^2)^{n-\frac{1}{2}}} \int \frac{1}{(1 + u^2)^n} du.$$

L'ultimo integrale nella formula precedente può essere calcolato iterativamente nel seguente modo. Si ha

$$\int \frac{1}{(1 + u^2)^n} du = \int \frac{1 + u^2 - u^2}{(1 + u^2)^n} du = \int \frac{1}{(1 + u^2)^{n-1}} du - \int \frac{u}{2} \frac{2u}{(1 + u^2)^n} du.$$

Mediante una integrazione per parti, l'ultimo integrale fornisce

$$\begin{aligned} \int \frac{u}{2} \frac{2u}{(1 + u^2)^n} du &= -\frac{u}{2} \frac{1}{(n-1)(1 + u^2)^{n-1}} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(n-1)(1 + u^2)^{n-1}} du \\ &= -\frac{u}{2} \frac{1}{(n-1)(1 + u^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{1}{(1 + u^2)^{n-1}} du. \end{aligned}$$

Ne segue che, posto

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{1}{(1 + u^2)^n} du, \\ I_n &= I_{n-1} + \frac{u}{2} \frac{1}{(n-1)(1 + u^2)^{n-1}} - \frac{I_{n-1}}{2(n-1)} \\ &= \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} + \frac{u}{2} \frac{1}{(n-1)(1 + u^2)^{n-1}}. \end{aligned}$$

• Esempi

1) Calcoliamo

$$\int \frac{3x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx.$$

Il denominatore ha due radici reali $x = 2$ e $x = 3$, quindi il rapporto tra i polinomi si può scrivere nella forma

$$\frac{3x + 1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3},$$

da cui

$$3x + 1 = A(x - 3) + B(x - 2).$$

Uguagliando i coefficienti di x e i termini noti di ambo i membri, si ottiene $A = -7, B = 10$. Si ricava così,

$$\int \frac{3x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx = 10 \ln |x - 3| - 7 \ln |x - 2| + c.$$

2) Calcoliamo

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx.$$

Poiché il numeratore è di grado maggiore del denominatore, abbiamo

$$\frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} = x + 1 + \frac{2}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

D'altra parte il denominatore si scompone in $(x - 1)(x^2 + 1)$, quindi

$$\frac{2}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}.$$

Dall'eguaglianza $2 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1)$, segue allora il sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C - B = 0 \\ A - C = 2 \end{cases}$$

da cui si ricava $A = 1, B = C = -1$. Si ottiene così

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln \frac{|x - 1|}{\sqrt{x^2 + 1}} - \arctan x + c.$$

3) Calcoliamo

$$\int \frac{x}{1 + x^3} dx.$$

Il denominatore si scompone come $1 + x^3 = (1 + x)(x^2 - x + 1)$, quindi si ha

$$\frac{x}{1 + x^3} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}.$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -A + B + C = 1 \\ A + C = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è $A = -\frac{1}{3}, B = C = \frac{1}{3}$. Si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1 + x^3} dx &= -\frac{1}{3} \int \frac{1}{1 + x} dx + \frac{1}{3} \int \frac{x + 1}{x^2 - x + 1} dx \\ &= -\frac{1}{3} \ln |x + 1| + \frac{1}{6} \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx \\ &= -\frac{1}{3} \ln \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{|x + 1|} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + c. \end{aligned}$$

11.9 Integrazione di funzioni goniometriche

Tra gli integrali di funzioni goniometriche, prendiamo in esame, in particolare, quelli della forma

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx,$$

dove n, m sono numeri naturali. Consideriamo alcuni esempi.

- Esempi

1) Calcoliamo

$$\int \sin^3 x \, dx.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx \\ &= \int \sin x \, dx + \int \cos^2 x \, d(\cos x) = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c. \end{aligned}$$

2) Calcoliamo

$$\int \sin^4 x \, dx.$$

Usando le formule di bisezione, si ha

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \, dx &= \int \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2} \right)^2 dx = \int \frac{1}{4} dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2(2x) \, dx \\ &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos(4x)}{2} dx = -\frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{3}{8}x + \frac{1}{32} \sin(4x) + c. \end{aligned}$$

3) Calcoliamo

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx.$$

Sempre usando le formule di bisezione, si ottiene

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \frac{(1 + \cos(2x))^2}{4} dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos(2x) - \cos^2(2x) - \cos^3(2x)) \, dx. \end{aligned}$$

Poiché

$$\begin{aligned} \int \cos^3(2x) \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 - \sin^2(2x)) d(\sin(2x)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin(2x) - \frac{1}{3} \sin^3(2x) \right) + c, \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{8}x + \frac{1}{16} \sin(2x) - \frac{1}{32}(2x + \sin(2x) \cos(2x)) - \frac{1}{16} \sin(2x) + \frac{1}{48} \sin^3(2x) + c \\ &= \frac{1}{48} \left(3x - \frac{3}{4} \sin(4x) + \sin^3(2x) \right) + c. \end{aligned}$$

4) Calcoliamo

$$\int \frac{1}{\cos x} \, dx.$$

In questo caso è opportuno fare una sostituzione usando la formula parametrica

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{con } t = \tan \frac{x}{2}.$$

Si ottiene così,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos x} \, dx &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{2}{1+t^2} \, dt = \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + c \\ &= \ln \left| \frac{\tan(x/2) + 1}{\tan(x/2) - 1} \right| + c. \end{aligned}$$

11.10 Integrazione di funzioni irrazionali

Spesso l'integrazione di funzioni contenenti radicali si riesce ad effettuare con una opportuna sostituzione che razionalizza la funzione integranda. Negli esempi seguenti si considereranno alcuni di questi casi.

- Esempi

1) Calcoliamo

$$\int x\sqrt{x-1} \, dx.$$

Ponendo $\sqrt{x-1} = t$ si ha $x = t^2 + 1$, $dx = 2t \, dt$. Otteniamo allora

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-1} \, dx &= \int (t^2 + 1)2t \, dt = 2 \int (t^4 + t^2) \, dt = \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + c \\ &= \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + c. \end{aligned}$$

2) Calcoliamo

$$\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}} \, dx.$$

Ponendo $\sqrt{1+x} = t$ si ha $x = t^2 - 1$, $dx = 2t dt$. Ne segue

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{1+x}} dx &= 2 \int \frac{1}{2-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} \right| + c \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+x}} \right| + c.\end{aligned}$$

3) Calcoliamo

$$\int \sqrt{1+x^2} dx.$$

In questo caso è opportuno porre $x = \sinh t$. Si ha $dx = \cosh t dt$. Si ottiene

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2} dx &= \int \cosh^2 t dt = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cosh(2t)}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sinh(2t) + c = \frac{1}{2} \sinh^{-1} x + \frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + c.\end{aligned}$$

4) Calcoliamo

$$\int \sqrt{1-x^2} dx.$$

Posto $x = \sin t$, si ha $dx = \cos t dt$. Usando un risultato del par.11.6 si ottiene allora

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \cos t \sin t + c \\ &= \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + c.\end{aligned}$$

5) Calcoliamo

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx.$$

Usiamo la sostituzione $x = \tan t$, da cui $dx = (1 + \tan^2 t) dt$. Otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} dx &= \int \frac{\sqrt{1+\tan^2 t}}{\tan^2 t} (1 + \tan^2 t) dt = \int \frac{1}{\sin^2 t \cos t} dt \\ &= \int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t \cos t} dt = \int \frac{1}{\cos t} dt + \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt \\ &= \ln \left| \frac{\tan(t/2) + 1}{\tan(t/2) - 1} \right| - \frac{1}{\sin t} + c = \ln |x + \sqrt{x^2+1}| - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + c.\end{aligned}$$

In quest'ultimo calcolo si è fatto uso del risultato dell'esempio 4) del paragrafo precedente.

L'integrale dato può essere anche risolto per parti. Considerato $1/x^2$ come fattore derivato, si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2} \sqrt{1+x^2} dx &= -\frac{1}{x} \sqrt{1+x^2} + \int \frac{1}{x} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = -\frac{1}{x} \sqrt{1+x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= -\frac{1}{x} \sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1} x + c.\end{aligned}$$

Se si esprime il settore seno iperbolico in termini di logaritmo, si ottiene il risultato precedente.

6) Calcoliamo

$$\int x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$$

Operiamo la sostituzione $t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, da cui

$$x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad dx = \frac{4t}{(t^2 + 1)^2} dt.$$

Facendo uso delle tecniche di integrazione delle funzioni razionali, si ottiene

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx &= 4 \int \frac{(t^2 - 1)t^2}{(t^2 + 1)^3} dt = 4 \int \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{3}{(1+t^2)^2} + \frac{2}{(1+t^2)^3} \right) dt \\ &= \arctan t - \frac{t(3t^2 + 1)}{(1+t^2)^2} + c = \arctan \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \sqrt{1-x^2} + c. \end{aligned}$$

11.11 Integrazione definita e calcolo di aree di figure piane

In base al corollario al teorema fondamentale del calcolo integrale, data una qualunque primitiva $\phi(x)$ della funzione $f(x)$, si ha

$$\int_a^b f(t) dt = \phi(b) - \phi(a).$$

Se nel determinare la primitiva si usa una sostituzione, l'integrale definito può essere calcolato direttamente nella variabile introdotta dalla sostituzione, modificando in corrispondenza gli estremi di integrazione. Se invece si usa una integrazione per parti, si verifica subito che nel caso di integrazione definita si ha

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

dove si è posto $[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$. Facciamo alcuni esempi.

- Esempi

1) Calcolare

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^8} dx.$$

Posto $x^4 = t$, si ha $4x^3 dx = dt$. Inoltre, per $x = 0$ si ha $t = 0$ e per $x = 1$ si ha $t = 1$. Dal'integrale precedente si ottiene

$$\int_0^1 \frac{1}{4} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{4} [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{16}.$$

2) Calcolare

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x}{\sin^2 x} dx.$$

Mediante una integrazione per parti si ha

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x}{\sin^2 x} dx = [-x \cot x]_{\pi/4}^{\pi/3} + \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cot x dx = -\left[\frac{\pi}{3} \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{4}\right] + [\ln |\sin x|]_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

3) Calcoliamo

$$\int_0^a \sqrt{ax - x^2} dx.$$

Posto $(x - \frac{a}{2}) = \frac{a}{2} \sin t$, si ha $dx = \frac{a}{2} \cos t dt$. Per $x = 0$ si ha $t = -\pi/2$ e per $x = a$ si ha $t = \pi/2$. Ne segue

$$\int_0^a \sqrt{ax - x^2} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a^2}{4} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{8} \pi.$$

Come applicazione dei degli integrali definiti consideriamo il problema del calcolo dell'area della superficie di una figura piana.

Siano f e g due funzioni integrabili nell'intervallo $[a, b]$ e tali che $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a, b]$. In base alla definizione di integrale data al par. 11.1, detta $\mathcal{A}$ l'area della superficie piana compresa tra i grafici delle due funzioni in $[a, b]$ si ha

$$\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

• Esempi

1) Calcolare l'area dell'area racchiusa dall'ellisse di semiassi a, b .

Riferita ad un sistema di assi cartesiani lungo i suoi due assi, l'ellisse è descritta dall'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

L'arco di ellisse del primo quadrante è il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

nell'intervallo $[0, a]$. L'area dell'ellisse sarà data allora da

$$\mathcal{A} = 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Questo integrale si risolve mediante la sostituzione $x = a \sin t$. Si ottiene

$$\mathcal{A} = 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = ab\pi.$$

2) Calcolare l'area del segmento di parabola di equazione $y = x^2$ relativo all'intervallo $[-2, 2]$.

Si tratta dell'area della figura piana delimitata dalla retta di equazione $y = 4$ e dalla parabola $y = x^2$, per ragioni di simmetria si ha

$$\mathcal{A} = 2 \int_0^2 (4 - x^2) dx.$$

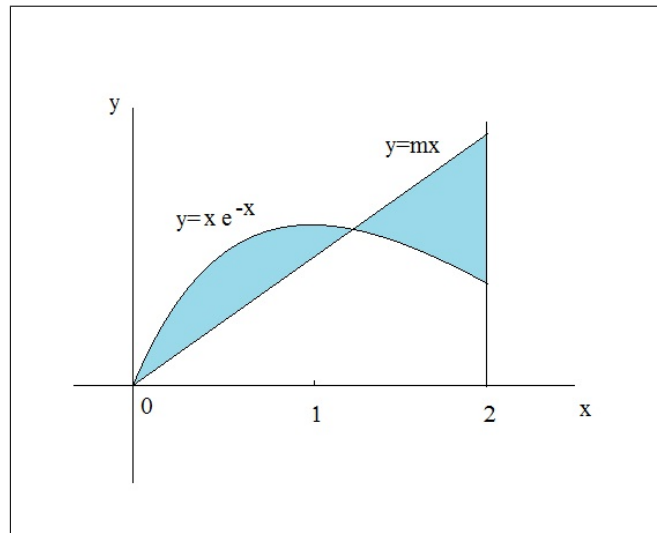
Il calcolo diretto fornisce

$$\mathcal{A} = 2 \left(4x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 2 \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{32}{3}.$$

3) Date le due curve di equazioni $y = xe^{-x}$ e $y = mx$, ($m > 0$), stabilire per quale valore di m le regioni comprese tra le due curve nell'intervallo $[0, 2]$ hanno la stessa area.

La funzione $f(x) = xe^{-x}$ risulta positiva per $x > 0$ e si annulla solo in $x = 0$. Inoltre presenta un massimo per $x = 1$. I grafici delle due curve sono rappresentati in figura. Esse si intersecano in un punto. Detta α l'ascissa di tale punto la condizione imposta dal problema si traduce nella seguente eguaglianza

$$\int_0^\alpha (xe^{-x} - mx) dx = \int_\alpha^2 (mx - xe^{-x}) dx.$$



Portando il secondo integrale a primo membro, invertendo i suoi estremi di integrazione e applicando la proprietà di additività sul dominio di integrazione, otteniamo

$$\int_0^2 (xe^{-x} - mx) dx = 0.$$

Da questa, mediante una integrazione per parti, si ottiene

$$[-xe^{-x}]_0^2 - \int_0^2 (-e^{-x}) dx - m \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 0 \quad \implies \quad -3e^{-2} + 1 - 2m = 0,$$

da cui si ricava

$$m = \frac{1 - 3/e^2}{2}.$$
