

COGNOME E NOME.....

Matricola:

CORSO DI STUDI..... DOCENTE.....

Ogni affermazione va adeguatamente motivata.

Esercizio 1 [17 punti].

a) Sia  $\alpha$  un parametro reale. Si consideri l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x e^{\alpha x}}{(1+x^2)^2} dx$$

a1) Per quali valori di  $\alpha \in \mathbb{R}$  tale integrale improprio è convergente? [3 punti]

a2) Calcolare, se convergente, tale integrale improprio per  $\alpha = 0$ . [3 punti]

b) Stabilire se esiste il seguente limite, e in caso affermativo calcolarlo [5 punti]

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin(xy) \cos(xy)}{x^2 + y^2}$$

c) Si consideri la funzione  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

c1) Stabilire se la funzione  $g$  è continua in  $(0, 0)$ . [4 punti]

c2) Stabilire se la funzione  $g$  ammette derivate parziali in  $(0, 0)$ , e in caso affermativo calcolarle. [2 punti]

COGNOME E NOME.....

Matricola:

CORSO DI STUDI..... DOCENTE.....

Ogni affermazione va adeguatamente motivata.

**Esercizio 2 [15 punti].**

a)

a1) Si studi il carattere della seguente serie numerica: [3 punti]

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (e^{1/n} - 1) \sin\left(\frac{\pi}{2n^2+1}\right).$$

a2) Si studi la convergenza e la convergenza assoluta della serie: [3 punti]

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n+5}}\right).$$

b) Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = y(t) \sin(t) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

b1) Senza risolvere l'equazione, provare esistenza ed unicità della soluzione in un intorno del punto  $t_0 = 0$ . [1 punto]

b2) Senza risolvere l'equazione, stabilire se  $t = 0$  è un punto stazionario per la soluzione, e in tal caso classificarlo. [3 punti]

b3) Scrivere un'espressione esplicita della soluzione specificandone l'intervallo di definizione. [5 punti]