Politecnico di Milano
Facoltà di Ingegneria di Sistemi
V Facoltà di Ingegneria

Anno Accademico 2003/2004

Equazioni Differenziali Ordinarie

Corso di Studi in Ingegneria Informatica

Esercizi - parte prima

Luisa Rossi

Federico M. Vegni

Indice

CAPITOLO 1

Esercizi di ripasso

Enunciamo per ora il Teorema di Esistenza ed Unicità locale delle soluzioni al Problema di Cauchy richiedendo l'esistenza della derivata f_y, e che tale derivata sia continua. Tale ipotesi verrà sostituita in seguito con l'ipotesi (più debole) di lipschitzianità in y, uniformemente in t, della f.

TEOREMA 1.1 (**Teorema di Esistenza ed Unicità locale**). *Data l'equazione differenziale del primo ordine in forma normale*

$$y'(x) = f(x, y)$$

se nell'aperto $A \subseteq \mathbf{R}^2$ sono soddisfatte le condizioni:

(i) $f(x, y)$ *continua in* A

(ii) $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ *continua in* A

allora la soluzione locale al problema di Cauchy assegnato in un qualunque punto di A esiste ed è unica.

1. Equazioni a variabili separabili

Esercizi.

Esercizio 1 Risolvere l'equazione differenziale

$$y' = f(x).$$

Esercizio 2 Si trovi l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali:

(a) $y' = 4$
(b) $y' = x^2$
(c) $y' = \log x$
(d) $x' = \cos 2t$
(e) $x' = \arctan t$

Esercizio 3 Si trovino tutte le soluzioni delle equazioni differenziali che seguono

(a) $y' = xy^2$
(b) $x' = x^3 \cos t$
(c) $x' = x^{-1}$
(d) $x' = tx^{-2}$
(e) $x' = t(1 + x^{-1})$.

Esercizio 4 Data l'equazione differenziale

$$x' = \frac{t}{x^2}$$

si trovi la tangente alla soluzione che passa per il punto

(a) $P(1,1)$
(b) $Q(-2,3)$.

Esercizio 5 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{t+1} + 3 \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 6 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \dfrac{t^2+1}{x^2+1} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzioni.

Soluzione 1 In base al Teorema Fondamentale del calcolo integrale, per una funzione $y(x)$ continua con derivata integrabile $y'(x)$ vale la formula

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} y'(x)dx + y_0$$

e quindi

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + y_0$$

da cui necessariamente $y_0 = y(x_0)$. Poiché le primitive di una funzione dipendono da una costante, quando non si vuole imporre il passaggio della soluzione per un punto (problema di Cauchy), ma si cerca l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale, si scrive semplicemente

$$y(x) = \int f(x)dx + C.$$

Soluzione 2 (a) $y(x) = 4x + C$
(b) $y(x) = x^3/3 + K$
(c) $y(x) = x \log x - x + C_0$
(d) $x(t) = 1/2 \sin 2t + C$
(e) $x(t) = t \arctan t - 1/2 \log(1 + t^2) + K$

Soluzione 3 (a) Per integrare l'equazione a variabili separabili occorre dividere per y. Si pone $y \neq 0$ e contemporaneamente si osserva che $y = 0$ è una soluzione particolare dell'equazione

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y^2} &= x \text{ che integrata membro a membro} \\ -\frac{1}{y} &= \frac{x^2}{2} + C \\ y &= \frac{-2}{x^2+K}. \end{aligned}$$

(b) Anche qui, $x = 0$ è integrale particolare. Se $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{x^3} &= \cos t \text{ e, integrando membro a membro} \\ -\frac{1}{2x^2} &= \sin t + C \\ x^2 &= \frac{1}{C - 2\sin t}.\end{aligned}$$

Essendo C una costante *arbitraria* si evita qui e nel seguito di “cambiarle nome” all'interno di una medesima successione di formule. Osservate che la soluzione è definita solo quando il secondo membro è positivo. Qualora sia stato assegnato un Problema di Cauchy, ad esempio il passaggio per il punto (t_0, x_0) per questa equazione, la condizione di positività del secondo membro viene automaticamente soddisfatta con l'appropriata scelta della costante C. Fissata la costante $\overline{C}$, la soluzione è determinata. La compatibilità di segno tra i due membri dell'equazione ha però ancora un effetto, infatti la soluzione sarà

$$x = +\sqrt{\frac{1}{\overline{C} - 2\sin t}}$$

se $x_0 > 0$, invece

$$x = -\sqrt{\frac{1}{\overline{C} - 2\sin t}}$$

se $x_0 < 0$. La soluzione nel caso $x_0 = 0$ è data infatti dall'integrale particolare. Da ultimo, quindi osservate come la condizione di compatibilià di segno nei due membri dell'equazione si traduca in una condizione di esistenza per la soluzione, che non è definita su tutto l'asse reale, ma in un intervallo che dipende da dove è stato assegnato il problema di Cauchy. In Figura 1 sono rappresentate le soluzioni per quattro Problemi di Cauchy assegnati.

(c) Il Teorema di Esistenza ed Unicità locale della soluzione non è applicabile se $x = 0$. Come aperto A in cui assegnare un Problema di Cauchy in modo da avere soluzione unica si può scegliere o il semispazio $A_1 = \{(t,x) \in \mathbf{R}^2 : x > 0\}$ oppure il semispazio $A_2 = \{(t,x) \in \mathbf{R}^2 : x < 0\}$. Integrando l'equazione si trova $x^2 - 2t = C$. In Figura 2 sono riportate le soluzioni relative a quattro problemi di Cauchy assegnati per questa equazione. Si osservi che alcune linee integrali oltre a risolvere il problema localmente, possono essere “prolungate su tutto $\mathbf{R}$ e su tutto $\mathbf{R}$ risolvono l'equazione differenziale. Altre soluzioni possono essere anch'esse prolungate, ma il loro intervallo massimale di esistenza non coincide con $\mathbf{R}$.

(d) Se $x \neq 0$ l'equazione è equivalente a $x^2 x' = t$, che integrata membro a membro purché $x \neq 0$, porta alla soluzione $x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}t^2 + C}$. Si osservino le soluzioni riportate in Figura 3. Ogni linea è definita su tutto $\mathbf{R}$. Solo le soluzioni tutte positive risolvono l'equazione differenziale in tutto $\mathbf{R}$. Le soluzioni negative risolvono l'equazione assegnata solo nell'intervallo in cui sono negative, perché per $x = 0$ l'equazione non ha significato.

(e) L'equazione differenziale ha significato solo se $x \neq 0$. Inoltre, $x = -1$ è integrale particolare dell'equazione. Se $x \neq -1, 0$, l'equazione è equivalente a

$$\frac{x}{x+1}x' = t.$$

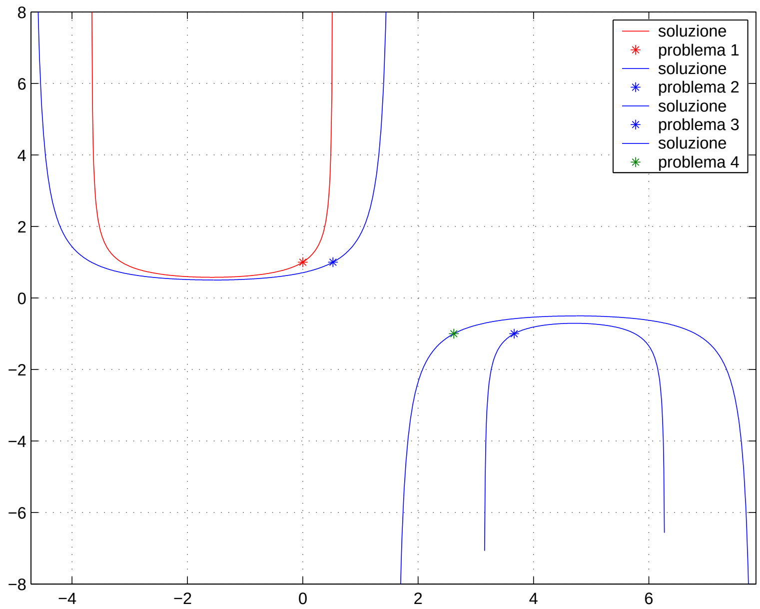

FIGURA 1. Problema 1:(0,1), Problema 2:$\left(\frac{\pi}{6},1\right)$, Problema 3:$\left(\frac{7\pi}{6},-1\right)$, Problema 4:$\left(\frac{5\pi}{6},-1\right)$

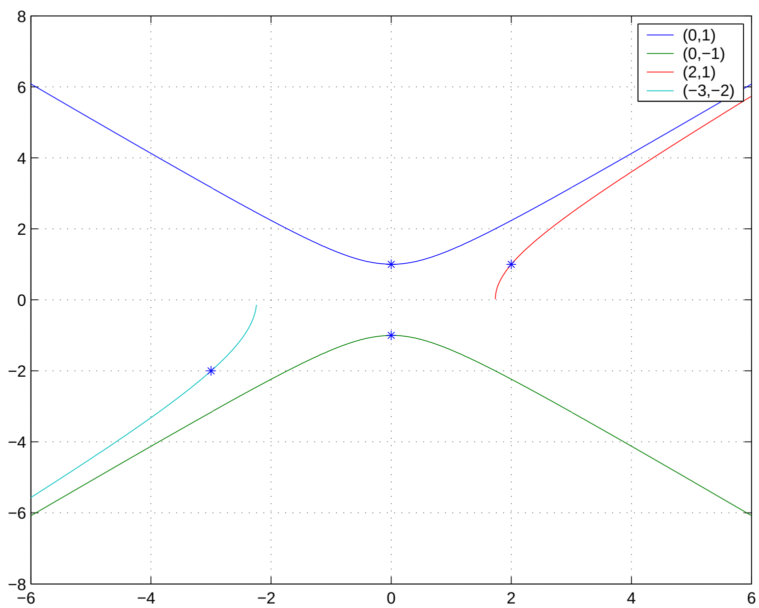

FIGURA 2. Soluzioni dei Problemi di Cauchy specificati nella legenda

Integrando abbiamo

$$\int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx = \int t\,dt$$

da cui

$$x - \log|x+1| = \frac{1}{2}t^2 + C.$$

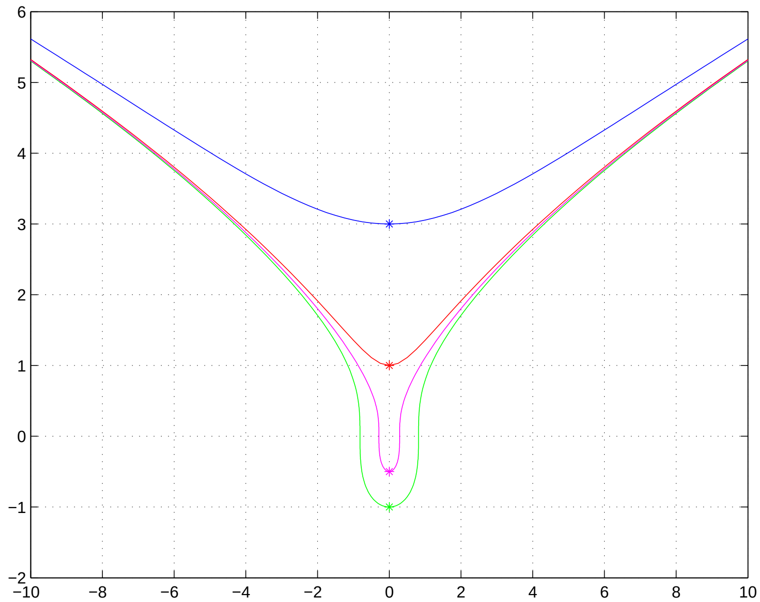

FIGURA 3. Le soluzioni dei problemi di Cauchy (∗) per l'equazione $x' = tx^{-2}$

Assegnati i Problemi di Cauchy nei punti $(0, 1)$, $(0, -1/2)$ e $(0, -2)$ le corrispondenti soluzioni saranno, rispettivamente:

$$x - \log(x + 1) = \frac{t^2}{2} - \log 2 + 1$$

$$x - \log(x + 1) = \frac{t^2}{2} + \log 2 - \frac{1}{2}$$

$$x - \log(-x - 1) = \frac{t^2}{2} - 2 - \log 3.$$

Soluzione 4 Entrambi i punti P e Q appartengono ad aperti in cui sono verificate le ipotesi del Teorema di Esistenza ed unicità locale della soluzione (rispettivamente il semipiano $x > 0$ e il semipiano $x < 0$). Essendo unica la soluzione locale al problema di Cauchy, è unica la tangente alla soluzione rispettivamente in P e in Q. Le rette richieste sono
(a) $x - 1 = t - 1$
(b) $x - 3 = -\frac{2}{9}(t + 2)$.

2. Equazioni lineari a coefficienti costanti omogenee e non

Esercizi.

Esercizio 1 Si trovino l'integrale generale delle seguenti equazioni lineari a coefficienti costanti omogenee:
(a) $y'' + 6y' + 5y = 0$
(b) $y'' + 6y' + 9y = 0$
(c) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Esercizio 2 Sia data l'equazione lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti e reali:

$$y'' + by' + cy = h(t).$$

(a) Nel caso $b = 2$, $c = 2$ e $h(t) = \exp(2t) + 5\exp(-t) + \exp(t)$, determinarne un integrale particolare, dopo aver illustrato il principio di sovrapposizione.
(b) Scriverne l'integrale generale nei casi:
(i) $b = -2$, $c = -3$, $h(t) = \exp(2t) + \exp(t)$,
(ii) $b = -3$, $c = 2$, $h(t) = \exp(2t) + \exp(5t)$,
(iii) $b = 0$, $c = 9$, $h(t) = \exp(2t) + \sin(3t)$.

Esercizio 3 Data l'equazione

$$y''' + y'' - 2y = 5e^{kx}$$

trovare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata e, al variare di $k \in \mathbf{R}$, trovare l'integrale generale dell'equazione completa.

Soluzioni.

Esercizio 1 L'integrale generale di un'equazione a coefficienti costanti, omogenea, di qualunque ordine è la combinazione lineare di n integrali particolari linearmente indipendenti. Associata a ciascuna equazione differenziale la propria equazione caratteristica
(a) $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$
(b) $\lambda^2 + 5\lambda + 9 = 0$
(c) $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$
e le relative soluzioni
(a) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -5$
(b) $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -3$
(c) $\lambda_1 = -1 - 2\mathrm{i}$, $\lambda_2 = -1 + 2\mathrm{i}$
ricaviamo da ogni radice dell'equazione un integrale dell'equazione differenziale. In particolare si verifichi che
(a) $y_1 = e^{-t}$ e $y_2 = e^{-5t}$
(b) $y_1 = e^{-3t}$ e $y_2 = te^{-3t}$
(c) $y_1 = e^{-t}\sin(2t)$ e $y_2 = e^{-t}\cos(2t)$
le coppie sono rispettivamente soluzioni delle equazioni (a), (b), (c) e che la y_1 è linearmente indipendente dalla y_2. Ne segue che l'integrale generale nei tre casi è
(a) $y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-5t}$
(b) $y(t) = k_1e^{-3t} + k_2te^{-3t}$
(c) $y(t) = C_1e^{-t}\sin(2t) + C_2e^{-t}\cos(2t)$.

Esercizio 2 Equazione : $y'' + by' + cy = h(t)$ con $b, c \in \mathbf{R}$.
(a) $b = c = 2$, $h(t) = e^{2t} + 5e^{-t} + e^t = h_1(t) + h_2(t) + h_3(t)$. L'equazione lineare non omogenea ha il termine noto decomponibile in tre addendi più semplici. In base al principio di sovrapposizione, un integrale particolare si può ottenere cercando un integrale particolare delle equazioni

$$y'' + 2y' + 2y = h_k(t), \text{ con } k = 1, 2, 3$$

e poi sommando i tre integrali particolari trovati.
Per calcolare i tre integrali particolari occorre conoscere le soluzioni del polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata: $z'' + 2z' + 2z = 0$. Le radici di $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ sono: $\lambda = -1 + i$ e $\lambda = -1 - i$. I tre termini forzanti non discendono da tali autovalori, pertanto i tre integrali particolari sono della forma $u_k = c_ke^{\alpha_k t}$, con le costanti c_k da determinarsi. Risulta: $u_1(t) = c_1e^{2t}$, $u_1'(t) = 2c_1e^{2t}$, $u_1''(t) = 4c_1e^{2t}$ da cui $(4+4+2)c_1 = 1$ quindi $c_1 = 1/10$. Analogamente, se

$u_2(t) = c_2 e^{-t}$ deve soddisfare l'equazione $y'' + by' + cy = 5e^{-t}$ deve essere $c_2 = 5$. Infine, se $u_3(t) = c_3 e^t$ $u_3'(t) = c_3 e^t$, $u_3''(t) = c_3 e^t$ da cui $(1+2+2)c_3 = 1$ e $c_3 = 1/5$. Un integrale particolare dell'equazione completa è dato da

$$u(t) = \frac{1}{10}e^{2t} + 5e^{-t} + \frac{1}{5}e^t.$$

L'integrale generale dell'equazione completa è, allora,

$$y(t) = K_1 e^{-t}\cos t + K_2 e^{-t}\sin t + \frac{1}{10}e^{2t} + 5e^{-t} + \frac{1}{5}e^t.$$

(b) (i) $b = -2$, $c = -3$; $h(t) = e^{2t} + e^t$ $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. Da cui: $\lambda = -1$, $\lambda = 3$.
Integrale generale:

$$\begin{aligned} y(t) &= K_1 e^{-t} + K_2 e^{3t} + u(t) \\ &= K_1 e^{-t} + K_2 e^{3t} - \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{4}e^t \end{aligned}$$

essendo $u_1(t) = c_1 e^{2t}$, $u_1'(t) = 2c_1 e^{2t}$, $u_1''(t) = 4c_1 e^{2t}$ da cui $c_1 = -1/2$; $u_3(t) = c_3 e^t$ $u_3'(t) = c_3 e^t$, $u_3''(t) = c_3 e^t$, da cui $c_1 = -1/4$.

(ii) $b = -3$, $c = 2$, $h(t) = e^{2t} + e^{5t}$. $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$.
L'integrale generale:

$$\begin{aligned} y(t) &= K_1 e^t + K_2 e^{2t} + u(t) \\ &= K_1 e^t + K_2 e^{2t} + te^{2t} + \frac{1}{12}e^{5t} \end{aligned}$$

Si noti che 2 è radice del polinomio caratteristico, quindi si cerca una soluzione particolare del tipo

$$u_1(t) = c_1 t e^{2t}$$

allora $u_1'(t) = c_1 e^{2t}(1 + 2t)$, $u_1''(t) = c_1 e^{2t}(2 + 4t + 2)$ da cui $(4 - 4t - 3 - 6t + 2t)c_1 = 1$ e $c_1 = 1$; $u_2(t) = c_1 e^{5t}$, $u_2'(t) = 5c_1 e^{5t}$, $u_2''(t) = 25c_1 e^{5t}$ da cui $(25 - 15 + 2)c_1 = 1$ e $c_1 = 1/12$.

(iii) $b = 0$, $c = 9$; $h(t) = e^{2t} + \sin 3t$. $P(\lambda) = \lambda^2 + 9 = 0$, ha soluzioni: $\lambda = 3i$ e $\lambda = -3i$. L'integrale generale risulta

$$y(t) = K_1 \cos 3t + K_2 \sin 3t + \frac{1}{13}e^{2t} - \frac{t}{6}\sin 3t$$

essendo $u_1(t) = c_1 e^{2t}$, $u_1'(t) = 2c_1 e^{2t}$, $u_1''(t) = 4c_1 e^{2t}$, da cui $(4+9)c_1 = 1$ se e solo se $c_1 = 1/13$ la soluzione legata al termine noto $h_1(t) = e^{2t}$.
Nel caso di termine noto $h_2(t) = \sin 3t$, l'equazione ritrae il moto armonico con forzante sinusoidale, avente lo stesso periodo delle soluzione dell'omogenea associata (risonanza): si cerca l'integrale particolare del tipo:
$u_2(t) = c_1 t \sin 3t + c_2 t \cos 3t$,
$u_2'(t) = c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t + 3c_1 t \cos 3t - 3c_2 t \sin 3t$,
$u_2''(t) = 6c_1 \cos 3t - 6c_2 \sin 3t - 9c_1 t \sin 3t - 9c_2 t \cos 3t$ e di conseguenza deve essere: $6c_1 \cos 3t - 6c_2 \sin 3t - 9c_1 t \sin 3t - 9c_2 t \cos 3t + 9(c_1 t \sin 3t + c_2 t \cos 3t) = \sin 3t$ allora $c_1 = 0$, $c_2 = -\frac{1}{6}\sin 3t$.

Esercizio 3 L'integrale generale dell'equazione

$$y''' + y'' - 2y = 0$$

è $u(t) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}\cos x + c_3 e^{-x}\sin x$ essendo 1, $-1 \pm i$ le radici del polinomio caratteristico $\lambda^3 + \lambda^2 - 2 = 0$.
Se $k \neq 1$ sto forzando il sistema con un termine noto che non è in risonanza con gli autovalori dell'equazione. Posso dunque cercare per similitudine se una funzione della famiglia $f(x) = Ae^{kt}$, con A da determinarsi, sia soluzione dell'equazione completa. Derivando si ottiene
$f'(x) = Ake^{kt}$
$f''(x) = Ak^2e^{kt}$
$f'''(x) = Ak^3e^{kt}$
da cui si ricava che $f(x)$ per essere soluzione dell'equazione deve soddisfare la relazione

$$A = \frac{5}{k^3 + k^2 - 2}$$

ed il denominatore non è nullo essendo $k \neq 1$. L'integrale generale è

$$y(t) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}\cos x + c_3 e^{-x}\sin x + \frac{5e^{kt}}{k^3 + k^2 - 2}.$$

Invece, nel caso $k = 1$, si cerca per quale valore di A, $f(x) = Axe^x$ sia soluzione dell'equazione completa. Dopo aver derivato,
$f'(x) = Ae^x(x + 1)$
$f''(x) = Ae^x(x + 2)$
$f'''(x) = Ae^x(x + 3)$
si ricava che deve essere $A = 1$. L'integrale generale è

$$y(t) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}\cos x + c_3 e^{-x}\sin x + xe^x.$$

3. Equazioni lineari del primo ordine con coefficienti non costanti

Data l'equazione

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

vi ricordiamo brevemente il metodo di integrazione con un fattore integrante, di notevole interesse e larghe applicazioni. Riscriviamo l'equazione moltiplicata per una funzione incognita $\mu(x)$:

$$y'(x)\mu(x) - a(x)\mu(x)y(x) = b(x)\mu(x). \tag{1.1}$$

E' ovvio che, se la funzione $\mu(x)$ fosse tale da soddisfare a sua volta la condizione

$$-a(x)\mu(x) = \mu'(x) \tag{1.2}$$

il primo membro della (1.1) coinciderebbe con la derivata del prodotto $y(x)\mu(x)$, e la primitiva della (1.1) sarebbe data dalla relazione

$$y(x)\mu(x) = \int b(x)\mu(x)dx + C. \tag{1.3}$$

D'alta parte, le soluzioni della (1.2) sono le funzioni

$$\mu(x) = e^{-\int a(x)dx}$$

che sostituite nella (1.3) risolvono il problema

$$y(x) = e^{\int a(x)} \Big(\int b(x) e^{-\int a(x)dx} + C \Big).$$

Esercizi.

Esercizio 1 Integrare l'equazione $x' = x - t$.

Esercizio 2 Dimostrare che la soluzione dell'equazione $X' = Xt + \sin t$ passante per $(\pi/4, 2)$ può essere scritta come

$$X(t) = e^{\int_{\pi/4}^t \tau d\tau} \left[2 + \int_{\pi/4}^t \sin\tau e^{-\int_{\pi/4}^\tau \sigma d\sigma} d\tau \right]. \tag{1.4}$$

Esercizio 3 Dimostrare che l'unica soluzione dell'equazione $X' = a(t)X + b(t)$ passante per (t_0, x_0) può essere scritta nella forma

$$X(t) = e^{\int_{t_0}^t a(\tau)d\tau} \left[x_0 + \int_{t_0}^t b(\tau) e^{-\int_{t_0}^\tau a(\sigma)d\sigma} d\tau \right].$$

Esercizio 4 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{\sin t}{\cos t} y = \cos t \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzioni.

Esercizio 1 Moltiplico l'equazione per la funzione incognita $\mu(t)$:

$$x'(t)\mu(t) - x(t)\mu(t) = -t\mu(t).$$

L'equazione precedente sarebbe facile da integrare se

$$-\mu(t) = \mu'(t).$$

Tra le sue soluzioni consideriamo la più semplice

$$\mu(t) = e^{-t}.$$

Ricaviamo quindi che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[x(t)e^{-t}\right] &= -te^{-t} \\ x(t)e^{-t} &= te^{-t} + e^{-t} + C \\ x(t) &= t + 1 + Ce^t. \end{aligned}$$

Risolvere l'esercizio scrivendo la soluzione come sovrapposizione dell'integrale generale della parte omogenea e di una soluzione particolare $(At + B)$ dell'equazione completa.

Esercizio 2 La funzione data da (1.4) passa per il punto $(\pi/4, 2)$, come si verifica facilmente per sostituzione. Derivando la (1.4), ed applicando il Teorema Fondamentale del calcolo integrale, si ottiene

$$\begin{aligned} X'(t) &= te^{\int_{\pi/4}^t \tau d\tau} \left[2 + \int_{\pi/4}^t \sin\tau e^{-\int_{\pi/4}^\tau \sigma d\sigma} d\tau \right] \\ &\quad + e^{\int_{\pi/4}^t \tau d\tau} \left[\sin t e^{-\int_{\pi/4}^t \sigma d\sigma} \right] \\ &= tX(t) + \sin t \end{aligned}$$

Esercizio 3 La dimostrazione ricalca esattamente quella fornita nell'esercizio precedente.

Esercizio 4 In base al problema di Cauchy assegnato, l'equazione perde di significato fuori dall'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Applicando la relazione trovata nell'esercizio 3, si ha

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\int_0^t \frac{\sin\tau}{\cos\tau}d\tau}\left[1+\int_0^t \cos(\tau)e^{\int_0^\tau \frac{\sin\sigma}{\cos\sigma}d\sigma}d\tau\right] \\ &= e^{\log|\cos t|}\left[1+\int_0^t \cos(\tau)e^{-\log|\cos\tau|}d\tau\right] \\ &= \cos t(1+t) \end{aligned}$$

ristretta a $(-\pi/2, \pi/2)$.

4. Equazioni di Bernoulli

Si consideri l'equazione

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)[y(t)]^\alpha.$$

Per $\alpha = 0$ corrisponde ad una equazione lineare; per $\alpha = 1$ è una equazione lineare omogenea (ma potrebbe essere integrata anche come equazione a variabili separabili). Inoltre, se $\alpha > 0$, $y = 0$ è integrale particolare. Sia ora $\alpha \neq 0, 1$. Riscriviamo l'equazione come

$$y' = y^\alpha[a(t)y^{1-\alpha} + b(t)].$$

Con la sostituzione

$$z(t) = [y(t)]^{1-\alpha}$$

l'equazione diventa lineare

$$z' = (1-\alpha)a(t)z + (1-\alpha)b(t).$$

Esercizi.

Esercizio 1 Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni:

(a) $y' - y = ty^2$

(b) $y' = -\frac{1}{t}y + \sqrt{y}$

(c) $y' = \frac{2}{x}y - \frac{\log x}{x}y^2$

(d) $u' = -2tu + u^3t^3$

(e) $y' = \frac{2}{x}y + \frac{4}{x^2}\sqrt{y}$.

Esercizio 2 Integrare l'equazione

$$u' = \frac{u^3}{t^2 + tu^2}.$$

Soluzioni.

Esercizio 1 (a) Si osservi che $y = 0$ è integrale particolare dell'equazione. Sia $y \neq 0$. Dall'equazione, raccogliendo y^2, si ha

$$y' = y^2(y^{-1} + t).$$

Si pone

$$z(t) = [y(t)]^{-1} \tag{1.5}$$

da cui derivando $z' = -y^{-2}y'$, e infine

$$z' = -z - t$$

la cui soluzione è

$$z(t) = Ce^{-t} - t + 1.$$

Sostituendo nella (1.5) si ha

$$y(t) = [Ce^{-t} - t + 1]^{-1}.$$

(b) Deve essere $t \neq 0$. Supponiamo di integrare l'equazione nel semispazio $t > 0$ (il procedimento è analogo anche nel caso $t < 0$). Allora

$$\frac{1}{2}y^{-1/2}y' = -\frac{1}{2}\frac{1}{t}y^{1/2} + \frac{1}{2}$$

e con la sostituzione $z = y^{1/2}$, da cui si ricava $z > 0$, si ha

$$z' = -\frac{1}{2t}z + \frac{1}{2}.$$

Integrando l'equazione lineare troviamo

$$z(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}}\left[C + \frac{1}{3}\mathrm{sign}(t)|t|^{3/2}\right].$$

Si osservi che se $C < 0$, affinché sia soddisfatta la condizione $z > 0$, deve essere $t > (-3C)^{2/3}$ che costituisce l'insieme di definizione della soluzione.

(c) Ovviamente, l'equazione può essere integrata solo per $x > 0$. La retta $y = 0$ è integrale particolare. Se $y \neq 0$, con il metodo di integrazione delle equazioni di Bernoulli si ottiene $y(t) = \dfrac{1}{\dfrac{C}{x^2} + \dfrac{1}{2}\log x - \dfrac{1}{4}}$.

(d) $y(t) = \dfrac{1}{Ce^{2t^2} + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{4}}$.

(e) Anche qui, data la condizione $x \neq 0$, l'equazione può essere integrata o nel semipiano $x > 0$, oppure nel semipiano $x < 0$, a seconda del problema di Cauchy che si intende risolvere. Inoltre, in entrambi i semipiani, $y = 0$ è integrale particolare; scelta $y > 0$(ma si può procedere in modo analogo anche per i valori di y negativi), con la sostituzione $z = \sqrt{y}$, si ottiene l'equazione $z' = \dfrac{z}{x} + \dfrac{2}{x^2}$. Si ricava la soluzione $y = \left(Cx - \dfrac{1}{x}\right)^2$, che vale sia per $x > 0$ sia per $x < 0$.

Esercizio 2 La linea $u = 0$ è soluzione particolare. Se $u \neq 0$, $t \neq 0$ e $u^2 \neq -t$ si può cercare una linea integrale del tipo $t = t(u)$. Allora, ricordando che

$$u' = \frac{du}{dt} = \frac{1}{\dfrac{dt}{du}} = \frac{1}{t'}$$

l'equazione diventa

$$t' = \frac{t}{u} + \frac{t^2}{u^3}.$$

Con la sostituzione $z = t^{-1}$ si ottiene

$$z' = -\frac{1}{u} - \frac{1}{u^3}$$

e si procede come di consueto:

$$z = -\log|u| + \frac{1}{2u^2} + C = \frac{1}{t}.$$

La funzione è un poco complicata, e occorre provarne l'invertibilità. Dall'equazione $z' = -\frac{1}{u} - \frac{1}{u^3}$ si osserva che z' ha segno costante se $u > 0$ o se $u < 0$, quindi ogni ramo è invertibile come funzione di u e di z. Si ricava allora che

$$t = \frac{2u^2}{1 + Ku^2 - 2u^2 \log|u|}.$$

5. Equazioni omogenee

Sono equazioni del tipo

$$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right).$$

Ad esempio, sono equazioni omogenee le equazioni

$$y' = 1 + \frac{y}{x}$$

oppure

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{\pi}{2}\frac{x^2}{y^2 \arctan(y/x)}.$$

Ma l'esempio più significativo per questo corso di equazione omogenea è costituito da equazioni della forma

$$y' = \frac{ax + by}{cx + dy}$$

dove cioè il secondo membro è rapporto di funzioni lineari nelle variabili x ed y. Equazioni di questo tipo si riconducono ad equazioni omogenee semplicemente raccogliendo x a numeratore ed a denominatore.

Un'equazione omogenea $y' = f(y/x)$ perde di significato se $x = 0$, quindi potrà essere integrata o nel semipiano $x > 0$ o nel semipiano $x < 0$.

L'integrazione di un'equazione omogenea si riduce all'integrazione di una equazione a variabili separabili con la sostituzione

$$t = \frac{y}{x}. \tag{1.6}$$

Infatti, ricordando che y è funzione di x (e quindi che anche t risulta essere funzione di x), derivando la (1.6), si ottiene

$$\begin{aligned} t'(x) &= \frac{y'(x)x - y(x)}{x^2} \\ &= \frac{f(t(x)) - t(x)}{x} \end{aligned} \tag{1.7}$$

dopo aver ancora sostituito la (1.6) nell'espressione precedente. L'equazione differenziale (1.7) è a variabili separabili, e può dunque essere integrata:

$$\int \frac{dt}{f(t) - t} = \log|x| + C$$

se quindi chiamiamo $\phi(t)$ una primitiva della funzione $1/(f(t)-t)$, abbiamo

$$\phi(t) = \log|x| + C$$

ovvero, cambiando nome alle costanti,

$$e^{\phi(t)} = C|x| \tag{1.8}$$

che è l'integrale generale della (1.7). Si osservi che la costante C deve essere positiva. Tornando indietro con la sostituzione della (1.6) nella (1.8) otteniamo

$$e^{\phi(y/x)} = C|x|$$

che è l'integrale generale dell'equazione omogenea da cui siamo partiti. Si osservi che l'integrale generale che abbiamo ottenuto è una linea nel piano IN FORMA IMPLICITA.

In definitiva, l'integrale generale dell'equazione omogenea è noto nel momento in cui si conosca la funzione $\phi(t)$, ovvero

$$\phi(t) = \int \frac{1}{f(t)-t} dt.$$

Concludiamo questa breve presentazione ricordando che ovviamente il problema di Cauchy deve essere assegnato in punti dove l'equazione differenziale non perda di significato, quindi nel caso di equazioni omogenee, certamente almeno con $x \neq 0$.

Esercizi.

Esercizio 1 Trovare l'integrale generale dell'equazione omogenea $y' = 1 + \dfrac{y}{x}$.

Esercizio 2 Trovare l'integrale generale dell'equazione omogenea $y' = \dfrac{3y-4x}{y-x}$.

Esercizio 3 Trovare l'integrale generale dell'equazione omogenea $y' = \dfrac{y}{2x+y}$.

Esercizio 4 Trovare l'integrale generale dell'equazione omogenea $y' = 2\dfrac{y-x}{x+y}$.

Esercizio 5 Trovare l'integrale generale dell'equazione omogenea $y' = \dfrac{y}{x} + 2\tan\dfrac{y}{x}$.

Soluzioni.

Soluzione 1 L'equazione perde di significato se $x = 0$. Seguendo la traccia descritta poco sopra, sostituiamo $t = y/x$. Risulta

$$f(t) = 1 + t.$$

$$\phi(t) = \int \frac{1}{f(t)-t} dt = \int dt = t$$

(non aggiungiamo nessuna costante, infatti viene richiesto di trovare UNA primitiva dell'integranda). L'integrale generale è allora

$$\begin{aligned} e^{\phi(t)} &= C|x| \\ e^{t} &= C|x| \\ e^{y/x} &= C|x|. \end{aligned}$$

Per esercizio, il lettore diligente dovrà tradurre l'equazione (IMPLICITA) trovata in forma ESPLICITA (esplicitare la variabile dipendente y rispetto alla variabile indipendente x) e verificare che questa funzione, se derivata, risolve esattamente l'equazione differenziale assegnata.

Soluzione 2 L'equazione perde di significato se $y = x$. Raccogliendo x a numeratore ed a denominatore dell'equazione assegnata, troviamo

$$y' = \frac{3(y/x) - 4}{(y/x) - 1}$$

da cui, con la sostituzione $t = y/x$ si ottiene

$$f(t) = \frac{3t - 4}{t - 1}.$$

Cerchiamo la funzione $\phi(t)$ integrando $1/(f(t) - t)$[1]:

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \int \frac{1}{\frac{3t-4}{t-1} - t} dt = \int \frac{(1-t)dt}{t^2 - 4t + 4} \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{2t - 4 + 2}{(t-2)^2} dt \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{2t - 4}{(t-2)^2} dt - \int \frac{dt}{(t-2)^2} \\
&= -\frac{1}{2} \log(t-2)^2 + \frac{1}{t-2}.
\end{aligned}$$

Ancora una volta, ricordiamo che la procedura che stiamo seguendo prevede che la funzione $\phi(t)$ sia una particolare primitiva, cosa che equivale ad aver dato un valore arbitrario alla costante che compare nell'integrazione. Tale valore è sempre scelto 0 per comodità.

Abbiamo quindi[2]:

$$\begin{aligned}
e^{\phi(t)} &= C|x| \\
e^{\log|t-2|^{-1} + \frac{1}{t-2}} &= C|x| \\
|t-2|^{-1} e^{\frac{1}{t-2}} &= C|x| \\
e^{\frac{1}{t-2}} &= C|x||t-2|
\end{aligned}$$

e, tornando indietro con la sostituzione $t = y/x$, si ottiene l'integrale generale richiesto:

$$e^{\frac{x}{y-2}} = C|y - 2x|.$$

Il modulo può essere tolto, ammettendo di assegnare valori positivi e negativi alla costante. L'integrale generale può essere scritto equivalentemente come:

$$e^{\frac{x}{y-2}} = C(y - 2x).$$

[1] Prima di proseguire, il lettore si chieda se è sufficientemente preparato nella risoluzione degli integrali. Questo corso, e in particolare molte delle integrazioni che seguiranno, presuppongono che sia ESTREMAMENTE chiaro come risolvere l'integrazione di funzioni razionali fratte con denominatore di secondo ordine, del tipo $\int \frac{d_1 t + d_2}{at^2 + bt + c} dt$. Eventualmente, far riferimento al docente per chiarimenti.

[2] Il lettore che conosce le proprietà elementari dei logaritmi non avrà difficoltà a capire i passaggi che seguono. Al solito, eventualmente, far riferimento al docente per chiarimenti.

Soluzione 3 L'equazione perde di significato se $y = -2x$. Procedendo come negli esercizi precedenti,

$$y' = \frac{y}{x}\frac{1}{2 + y/x}$$

da cui con la sostituzione $t = y/x$

$$f(t) = \frac{t}{2+t}.$$

Sia allora

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \int \frac{dt}{f(t) - t} = -\int \frac{t+2}{t(t+1)}\,dt \\
&= -\int \frac{2}{t}\,dt + \frac{dt}{t+1} \\
&= -2\log|t| + \log|t+1| = \log\frac{|t+1|}{t^2}.
\end{aligned}$$

L'integrale generale è allora

$$\begin{aligned}
e^{\phi(t)} &= C|x| \\
\frac{|t+1|}{t^2} &= C|x|.
\end{aligned}$$

Sostituendo $t = y/x$, ed ammettendo valori positivi e negativi per la costante C, otteniamo infine:

$$y + x = Cy^2.$$

Anche qui, il lettore diligente provi a verificare che l'integrale trovato effettivamente risolve l'equazione differenziale da cui siamo partiti.

Soluzione 4 L'equazione perde di significato se $y = -x$. Ponendo $t = y/x$, si ottiene

$$f(t) = 2\frac{t-1}{t+1}$$

e dunque

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= -\int \frac{t+1}{t^2 - t + 2}\,dt \\
&= -\int \frac{1/2(2t-1) + 3/2}{t^2 - t + 2}\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\log(t^2 - t + 2) - \frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2 - t + 2}\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\log(t^2 - t + 2) - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(t - 1/2)^2 + 7/4}\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\log(t^2 - t + 2) - \frac{6}{7}\int \frac{1}{4/7(t-1/2)^2 + 1}\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\log(t^2 - t + 2) - \frac{3\sqrt{7}}{4}\arctan\frac{2}{\sqrt{7}}\left(t - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione trovata per ϕ nell'equazione $e^{\phi(t)} = C|x|$ e sapendo che $t = y/x$, troviamo infine l'integrale generale

$$e^{-\frac{3\sqrt{7}}{4}\arctan\frac{2}{\sqrt{7}}\left(\frac{2y-x}{2x}\right)} = C\sqrt{y^2 - yx + 2x^2}.$$

L'integrale generale che risolve il problema non può essere portato in forma esplicita.

Soluzione 5 Osserviamo che la retta $y = 0$ risolve l'equazione. Inoltre, l'equazione perde di significato se $x = 0$ e se $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$. Con la sostituzione consueta si ottiene $f(t) = t + \tan t$, e quindi,

$$\phi(t) = \int \frac{dt}{2\tan t} = \frac{1}{2}\int \frac{\cos t}{\sin t}\, dt = \frac{1}{2}\log|\sin t|.$$

L'integrale generale è

$$\begin{aligned} e^{\phi(t)} &= C|x| \\ e^{\log\sqrt{|\sin t|}} &= C|x| \\ \sqrt{\left|\sin\frac{y}{x}\right|} &= C|x| \\ \sin\frac{y}{x} &= Cx^2 \end{aligned}$$

con l'opportuno segno della costante C, a seconda di dove è stato assegnato il problema di Cauchy che si intende risolvere.

6. Esercizi proposti

Esercizio 1 Trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni omogenee:

(a) $y' = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy}$

(b) $y' = \dfrac{y}{x}\left[\dfrac{\log^2(y/x) - 1}{2\log(y/x)} + 1\right]$

(c) $y' = -3\dfrac{y}{x} + 2\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$

(d) $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2}$

(e) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{\cos(y/x)} - \tan\dfrac{y}{x}$.

CAPITOLO 2

Studi locali e globali, studi qualitativi

Ricordiamo l'enunciato del Teorema di Esistenza ed Unicità nelle ipotesi più generali.

TEOREMA 2.1 (**Teorema di Esistenza ed Unicitàlocale**). Sia A un insieme aperto di $\mathbf{R}^2$ e sia $(t_0, y_0) \in A$. Consideriamo il Problema di Cauchy

$$\text{(PC)} \qquad \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Se

(2.1) ► $f(t,y) \in C^0(A)$

(2.2) ► esiste $L > 0$ tale che $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$
per ogni$(t,y_1),(t,y_2)$ appartenenti ad un intorno di (t_0,y_0)
(f è localmente lipschitziana in y uniformemente in t)

allora PC ha una ed una sola soluzione locale. ■

Per equazioni che soddisfano il Teorema di Esistenza ed Unicità locale, l'ipotesi di crescita sublineare in una striscia S rispetto alla variabile y garantisce la prolungabilità della soluzione.

TEOREMA 2.2 (**Teorema di Prolungamento**). Data l'equazione $y' = f(t,y)$, soddisfacente il le ipotesi del Teorema di Esistenza ed Unicità locale in una striscia $S = (a,b) \times \mathbf{R}$. Se inoltre

$$|f(t,y)| \leq A + B|y| \text{ per ogni } (t,y) \in \overline{S},$$

allora la soluzione al problema di Cauchy assegnato in $(t_0,y_0) \in S$ può essere prolungata a tutto $[a,b]$. ■

I Lemmi che seguono riassumono condizioni di verifica immediata (o quasi) che garantiscono l'applicabilità del Teorema di Prolungamento.

LEMMA 2.1. Data l'equazione $y' = f(t,y)$, soddisfacente il le ipotesi del Teorema di Esistenza ed Unicità locale in una striscia $S = (a,b) \times \mathbf{R}$, se

$$|f(t,y)| \leq M \text{ per ogni } (t,y) \in \overline{S},$$

allora la soluzione al problema di Cauchy assegnato in $(t_0,y_0) \in S$ può essere prolungata a tutto $[a,b]$. ■

LEMMA 2.2. Data l'equazione $y' = f(t,y)$, soddisfacente il le ipotesi del Teorema di Esistenza ed Unicità locale in una striscia $S = (a,b) \times \mathbf{R}$, ed inoltre

$$|f_y(t,y)| \leq M \text{ esiste ed è limitata per ogni } (t,y) \in \overline{S},$$

allora la soluzione al problema di Cauchy assegnato in $(t_0,y_0) \in S$ può essere prolungata a tutto $[a,b]$. ■

Infine, è possibile verificare che è possibile applicare il Teorema di Prolungamento ad una funzione GLOBALMENTE lipschitziana in S (cioé che soddisfa la (2.2) con una costante di lipschitz L che è indipendente dall'intorno scelto).

LEMMA 2.3. Data l'equazione $y' = f(t, y)$, soddisfacente il le ipotesi del Teorema di Esistenza ed Unicità locale in una striscia $S = (a, b) \times \mathbf{R}$, ed inoltre

$$\text{esiste } L > 0 \text{ tale che } |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \text{ per ogni } (t, y_1), (t, y_2) \in \overline{S}$$

allora la soluzione al problema di Cauchy assegnato in $(t_0, y_0) \in S$ può essere prolungata a tutto $[a, b]$. ■

Esercizi.

Esercizio 1 Discutere l'esistenza globale delle soluzioni dei problemi di Cauchy per l'equazione

$$\frac{dx}{dt} = 2tx^2$$

con $x(0) = 0$, $x(2) = -1/3$, $x(0) = -1$. Determinare inoltre per quali condizioni iniziali le curve integrali sono determinate per ogni $t \in \mathbf{R}$.

Esercizio 2 Dato un problema di Cauchy per l'equazione differenziale $y' = f(x, y)$, si discuta la possibilità che due soluzioni distinte possano intersecarsi.

Esercizio 3 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \lambda x + \dfrac{t^2 + 1}{x^2 + 1}, & \qquad \lambda \in \mathbf{R} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

(a) studiare esistenza, unicità, prolungabilità;
(b) scrivere lo sviluppo di Mac Laurin al secondo ordine di una soluzione e tracciarne il grafico vicino a 0.

Esercizio 4 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + xy + x\sqrt{y} = 0 \\ y(0) = k \end{cases}$$

si dica, in base alla teoria per quali valori di k è possibile garantire esistenza ed unicità della soluzione. Risolvere quindi il problema per $k \geq 0$, e si studi in particolare il caso $k = 0$.

Esercizio 5 Ricordando l'enunciato del Teorema di Esistenza ed Unicità locale per il problema di Cauchy, si dimostri che l'equazione $\dot{y} = f(y)$ con $f \in C^1(\mathbf{R})$ non può avere soluzioni periodiche non costanti.

Esercizio 6 Data l'equazione

$$y' = \sqrt[3]{\frac{y^2 + 1}{x^4 + 1}}$$

si verifichi che il problema di Cauchy $y(x_0) = y_0$, per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, ammette soluzione unica, prolungabile in $\mathbf{R}$ e che tutte le soluzioni sono limitate.

Esercizio 7 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{ty}{1 + t^2 + y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

Verificare che la soluzione esiste unica, e si dica se tale soluzione è prolungabile in $[0,+\infty)$.

Esercizio 8 Disegnare, per alcuni valori di x e di t, il campo delle direzioni (e le curve isocline) dell'equazione

$$x' = x - t.$$

Soluzioni.

Soluzione 1 La funzione a secondo membro è regolare quanto vogliamo, per cui è assicurata esistenza ed unicità locale per ogni dato iniziale. D'altra parte la sua crescita è più che lineare, quindi non si può applicare il Teorema di Prolungamento. L'equazione è alle variabili separabili, ed $x(t) = 0$ è una soluzione particolare. Per $x \neq 0$, isolando le due variabili nei due membri si ottiene

$$\frac{dx}{x^2} = 2tdt,$$

da cui, integrando,

$$x(t) = -\frac{1}{t^2 + C}.$$

La soluzione per $x(0) = 0$ è $x(t) = 0$, che esiste su tutto $\mathbf{R}$.

Per $x(2) = -1/3$ si ha $C = -1$, per cui la soluzione esiste solo sull'intervallo $(1, +\infty)$.

Per $x(0) = -1$ si ha $C = 1$, e quindi la soluzione esiste su $\mathbf{R}$. Più in generale, se $x(t_0) = x_0$, con $x_0 \neq 0$, si ha $C = -(t_0^2 + 1/y_0)$; la soluzione è definita su $\mathbf{R}$ quando tale quantità è strettamente positiva, oltre che, naturalmente, quando $x_0 = 0$.

Soluzione 2 Siano $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due soluzioni locali rispettivamente dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_1) = y_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_2) = y_2 \end{cases}$$

si supponga che entrambe siano definite in un intorno di x_0 e che -per assurdo- sia $y_1(x_0) = y_0 = y_2(x_0)$, pur non coincidendo nell'intorno. Per definizione di soluzione di un'equazione differenziale, entrambe le linee $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni per del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

quindi necessariamente il punto (x_0, y_0) non può appartenere ad un insieme aperto in cui siano verificate le ipotesi di unicità locale della soluzione.

Soluzione 3 Si riconosce facilmente che

$$f(t,x) = \lambda x + \frac{t^2+1}{x^2+1} \in C(\mathbf{R}^2)$$

$$f_x(t,x) = \lambda + \frac{-2x(t^2+1)}{(x^2+1)^2} \in C(\mathbf{R}^2)$$

quindi, per il Teorema di Esistenza ed Unicità locali, la soluzione al Problema di Cauchy, comunque assegnata in $(t_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ esiste unica, per ogni valore del parametro λ. Inoltre, $f(t,x)$ è somma di una parte lineare e di una parte limitata rispetto a x

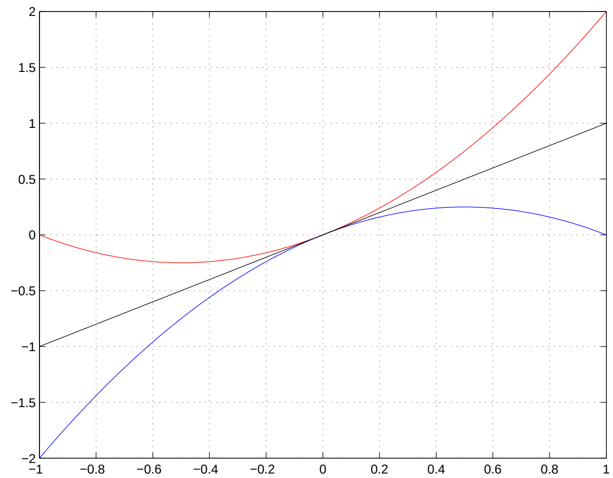

FIGURA 1. Grafico locale della soluzione nei casi $\lambda \neq 0$

uniformemente rispetto a t in tutto R^2, infatti per ogni $(t, x) \in S = (a, b) \times \mathbf{R}$, per ogni a, b,

$$\left| \frac{t^2+1}{x^2+1} \right| = \frac{1}{x^2+1} |t^2+1| \leq \max\{a^2+1, b^2+1\}.$$

Poiché la maggiorazione vale indipendentemente dalla scelta di a e b, la prolungabilità garantita dal Teorema, tramite la condizione (ii) vale su tutto $\mathbf{R}$.

Per poter scrivere lo sviluppo di Taylor della soluzione, occorre conoscere

$$\begin{array}{rclrcl} & & & x(0) & = & 0 \\ x'(t) & = & \lambda x(t) + \dfrac{t^2+1}{x(t)^2+1} & x'(0) & = & 1 \\ x''(t) & = & \lambda x'(t) + \dfrac{2t}{x^2+1} + \dfrac{-2x(t)x'(t)(t^2-1)}{(x^2+1)^2} & x''(0) & = & \lambda \end{array}$$

l'ultima condizione è stata ottenuta derivando ulteriormente l'equazione differenziale. Ne segue che lo sviluppo di Mac Laurin nell'intorno dell'origine della soluzione è

$$T_2(x) = 1 + \frac{\lambda}{2} x^2$$

il cui grafico è riportato nella Figura 1 nei casi $\lambda > 0$, in rosso, $\lambda < 0$, in blu e $\lambda = 0$ in nero.

Soluzione 4 Dalle relazioni

$$f(x, y) = -xy + x\sqrt{y} \in C^0(\mathbf{R} \times [0, \infty))$$
$$f_y(x, y) = -x + \frac{x}{2\sqrt{y}} \in C^0(\mathbf{R} \times (0, \infty))$$

si ricava per mezzo del Teorema di Esistenza ed Unicità locale che la soluzione esiste unica per ogni $(x, y) \in \mathbf{R} \times (0, \infty)$. Inoltre la soluzione potrebbe non essere unica se $k = 0$ (la continuità della derivata è infatti condizione che assicura l'unicità della soluzione). L'equazione stessa non esiste in $\mathbf{R} \times (-\infty, 0)$. L'equazione assegnata è di Bernoulli, e può essere integrata con la sostituzione $z = y^{1/2}$, da cui si ricava che $z > 0$. L'equazione lineare

$$2z' = -xz + x$$

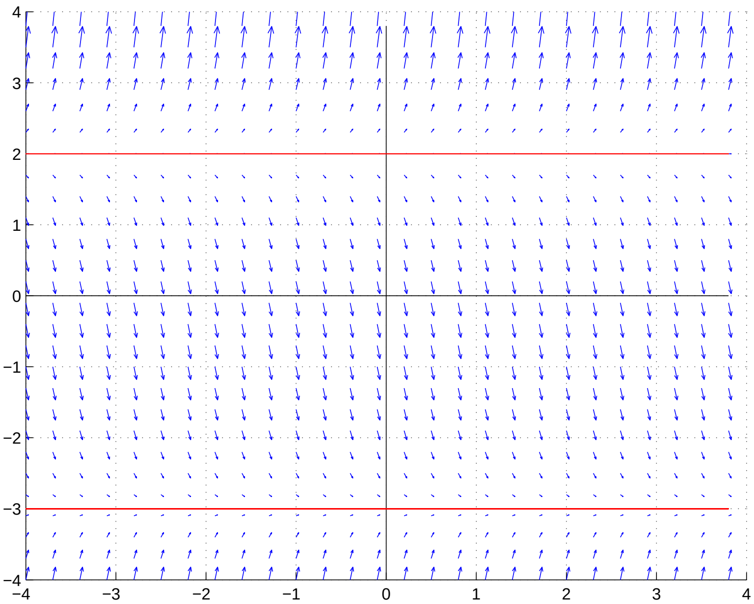

Figura 2. Campo delle direzioni per l'equazione $y' = y^2 + y - 6$.

ha soluzione $z = 1 + Ce^{-x^2/4}$, da cui si ricava $y = \left(1 + Ce^{-x^2/4}\right)^2$.

Soluzione 5 Discutiamo innanzi tutto il segno della derivata prima:

$$y' \geq 0 \iff f(y) \geq 0$$

(ricordiamo che le soluzioni vanno interpretate nel piano (t, y)). Per fissare le idee, consideriamo l'equazione $y' = y^2 + y - 6$;

$$y' \geq 0 \iff y^2 + y - 6 \geq 0 \iff y \leq -3 \text{ e } y \geq 2$$

il cui campo di direzioni è rappresentato in Figura 2. Ogni equazione autonoma del tipo $y' = f(y)$ ha un campo di direzioni che divide il piano t, y in fasce orizzontali.

Per rispondere al quesito posto nell'esercizio si ragiona per assurdo. Supponiamo che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

abbia una soluzione $y(t)$ periodica non costante. Diciamo che ha periodo T, necessariamente $y(t+T) = y(t)$ per ogni t e quindi $y(t_0 + T) = y_0 = y(t_0)$. Supponiamo che il problema di Cauchy sia stato assegnato in una striscia in cui $f(y_0) > 0$: per considerazioni basate sull'unicità della soluzione y deve rimanere nella striscia dove la sua derivata è positiva, ma ciò è in contraddizione con il fatto che dopo un tempo T la soluzione assuma la stessa quota.

Soluzione 6 Studiamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{\dfrac{y^2+1}{x^4+1}} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

sia $f(x,y) = \sqrt[3]{\dfrac{y^2+1}{x^4+1}}$ il cui dominio è, banalmente, tutto il piano $\mathbf{R}^2$. La funzione è continua dove è definita. La sua derivata parziale è

$$f_y(x,y) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}} \frac{2y}{3(1+y^2)^{2/3}}$$

anch'essa definita e continua in tutto $\mathbf{R}^2$. Per il Teorema di Esistenza ed Unicità, esiste la soluzione locale al problema di Cauchy, assegnato in un qualunque punto del piano x, y.

Inoltre, osservando che

$$0 < \frac{1}{1+x^4} \leq 1$$

si ricava che

$$|f(x,y)| \leq \sqrt[3]{1+y^2} = g(y).$$

Si ricava che "uniformemente rispetto ad x" la funzione $f(x,y)$ è limitata da $g(y)$, la cui derivata è

$$g' = \frac{2}{3} \frac{y}{(1+y^2)^{2/3}}.$$

Dimostriamo che g' è limitata. La funzione g' è dispari, possiamo studiarla quando il suo argomento è positivo. Dimostriamo prima che è limitata per $0 \leq y < 1$ poi dimostreremo che è limitata per $y \geq 1$.

Sia $0 \leq y < 1$; allora

$$0 \leq y^2 < 1 \iff 1 \leq y^2 + 1 < 2 \iff \frac{1}{2} < \frac{1}{1+y^2} \leq 1$$

$$\iff \frac{1}{2^{2/3}} < \frac{1}{(1+y^2)^{2/3}} \leq 1$$

dall'ultima disuguaglianza si ricava che

$$\frac{2}{3} \frac{y}{2^{2/3}} < \frac{2}{3} \frac{y}{(1+y^2)^{2/3}} \leq \frac{2}{3}.$$

Sia $y \geq 1$; allora osserviamo intanto che $y^\alpha \geq y$, per ogni $\alpha > 1$ - in particolare con la scelta $\alpha = \dfrac{4}{3}$ -. Si deduce

$$\frac{y}{(1+y^2)^{2/3}} \leq \frac{y^{4/3}}{(1+y^2)^{2/3}} < \frac{y^{4/3}}{(y^2)^{2/3}} = 1.$$

Concludiamo che la condizione (iii) del Teorema di Prolungamento è soddisfatta in ogni striscia (a,b) indipendentemente dalla scelta di a e di b. La soluzione è dunque prolungabile da $-\infty$ a $+\infty$.

Occupiamoci ora di dimostrare che tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono limitate. È facile osservare che

$$y' = \sqrt[3]{\frac{y^2+1}{x^4+1}} \geq 0.$$

Le soluzioni dell'equazione differenziale sono allora funzioni monotone. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{\dfrac{y^2+1}{x^4+1}} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

per la monotonia e la prolungabilità testé provate, ricaviamo l'esistenza dei seguenti limiti

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = l \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} y(x) = L$$

con

$$-\infty \le l \quad \text{e} \quad L \le +\infty.$$

Per provare la limitatezza delle soluzioni occorre provare che

$$-\infty < l \quad \text{e} \quad L < +\infty.$$

Dimostriamo che L non può essere $+\infty$ (la dimostrazione relativa a $l \neq -\infty$ è del tutto analoga). Separando le variabili, riscriviamo l'equazione differenziale come

$$\frac{dy}{\sqrt[3]{y^2+1}} = \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$$

dalle condizioni

$$\begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y(x) \longrightarrow L \text{ per } x \to +\infty \end{array}$$

ricaviamo che deve valere l'identità

$$\int_{y_0}^{L} \frac{dy}{\sqrt[3]{y^2+1}} = \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}. \tag{2.3}$$

Il secondo membro è un integrale generalizzato. Per $x \to +\infty$ si ha

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^{4/3}}}$$

e ricaviamo

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{4/3}} &= \lim_{a\to+\infty} \int_{x_0}^{a} \frac{dx}{x^{4/3}} = \lim_{a\to+\infty} \left[-3x^{-1/3}\right]_{x_0}^{a} \\ &= \lim_{a\to+\infty} \left[\frac{3}{x_0^{1/3}} - \frac{3}{a^{1/3}}\right] = \frac{3}{x_0^{1/3}}. \end{aligned}$$

L'integrale a secondo membro della (2.3) è dunque finito (ovvero, l'integranda è integrabile in senso generalizzato). Non è difficile verificare che il primo membro della (2.3) non è integrabile in senso generalizzato. Per convincersene lo studente giudizioso potrà provare a calcolare

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{y_0}^{a} \frac{dy}{y^{2/3}}.$$

Se ne deduce che il valore L nella (2.3) deve essere finito.

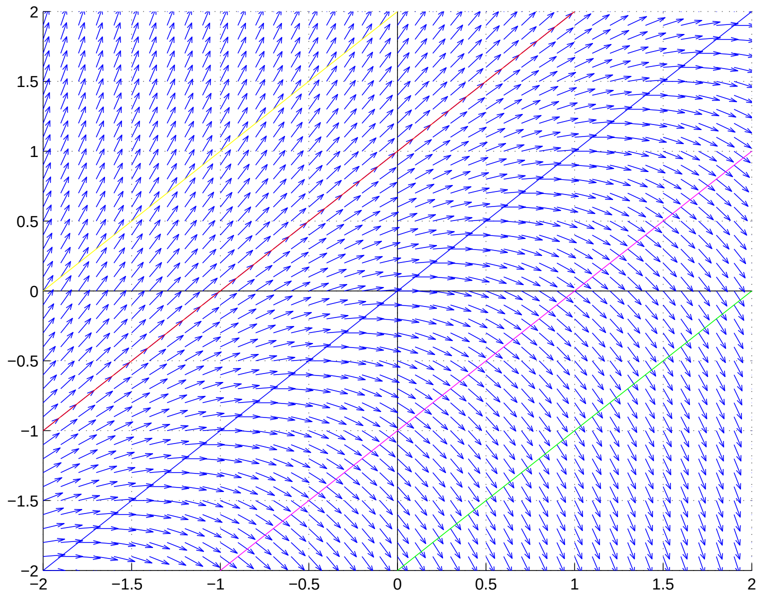

FIGURA 3. Campo di direzioni e alcune curve isocline dell'equazione proposta nell'Esercizio 8.

Soluzione 7 Osserviamo che

$$f(t,y) = \frac{ty}{1+y^2+t^2} \quad \in \quad C^0(\mathbf{R}^2)$$
$$f_y(t,y) = \frac{t(1+y^2+t^2)-2ty^2}{(1+y^2+t^2)^2} \quad \in \quad C^0(\mathbf{R}^2).$$

Sono verificate le ipotesi del Teorema di Esistenza ed Unicità.

Osserviamo che la retta $y=0$ è integrale particolare dell'equazione. Inoltre in tutto il primo quadrante ($t>0$ $y>0$) $y'>0$; la soluzione del problema di Cauchy assegnato è dunque monotona crescente per ogni $t>0$.

Proviamo ad applicare il Teorema di Prolungamento nella striscia

$$(t,y) \in (0,+\infty) \times \mathbf{R} = S.$$

Utilizzando la disuguaglianza di Young [1] nella striscia S, otteniamo

$$\left|\frac{ty}{1+y^2+t^2}\right| \le \frac{1}{2}\frac{t^2+y^2}{1+y^2+t^2} \le \frac{1}{2}.$$

Il Teorema di Prolungamento può dunque essere invocato essendo verificata la condizione (ii).

Esercizio 8 La Figura 3 rappresenta il campo di direzioni della soluzione e alcuni integrali dell'equazione. Si osserva immediatamente che la retta $x=t+1$ è integrale particolare dell'equazione.

[1] Siano A e B due numeri positivi. Svolgendo il quadrato $0 \le (A-B)^2 = A^2+B^2-2AB$ si ottiene l'utile disuguaglianza, detta *disuguaglianza di Young*

$$AB \le \frac{1}{2}(A^2+B^2).$$

CAPITOLO 3

Costruzione ed interpretazione di modelli, diagrammi di fase

Esercizi.

Esercizio 1 Due amici vanno a prendere un caffè al bar. Entrambi ordinano un caffé lungo, che viene servito ad una temperatura di $60°C$.

Federico allunga subito il caffé con una uguale quantità di latte, ed attende 10 minuti prima di sorseggiarlo. Gianmaria, invece, aspetta 5 minuti prima di allungare il caffé e quindi altri 5 minuti prima di consumarlo. Assumendo che la temperatura del latte sia di $16°C$, e che quella dell'ambiente sia di $24°C$, si determini chi tra Gianmaria e Federico beve il caffé più freddo. [Si assuma che la velocità con la quale un corpo si *raffredda* sia proporzionale alla differenza di temperatura tra il corpo e lo spazio ambiente secondo una opportuna costante k. Questa assunzione in Termodinamica prende il nome di *Legge di Fourier*.]

Esercizio 2 Un serbatoio contiene 200 litri d'acqua. All'istante t=0 una miscela contenente un etto di sale viene versata alla velocità di un litro al minuto e la mistura esce alla stessa velocità. Dopo quanto tempo ci saranno 10 chilogrammi di sale sciolti nel serbatoio?

Esercizio 3 Supponendo di investire 3000 euro al 5% di interesse, calcolare la somma ricavata dopo 2 mesi, se l'interesse viene composto annualmente, semestralmente, mensilmente, settimanalmente, giornalmente, e infine in modo continuo. Quindi supponendo che l'investimento all'istante t sia $A(t)$, scrivere l'equazione differenziale che regola il tasso di interesse composto con dato iniziale del problema pari ad A_0.

Esercizio 4 Si determini l'integrale generale dell'equazione

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + y = \sin t$$

per $\beta \geq 0$. Per quali valori di β si verifica il fenomeno della risonanza?

Esercizio 5 Il modello logistico (cfr. Pagani–Salsa pag.199)

$$P'(t) = \epsilon P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{k}\right)$$

dove ϵ, $k > 0$, può essere modificato nel cosiddetto *modello logistico con prelievo*

$$P'(t) = \epsilon P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{k}\right) - h$$

con $h > 0$.

(a) Discutere l'equazione così modificata.

(b) Tradurre nello spazio delle fasi monodimensionale i risultati trovati sia nel caso dell'equazione logistica sia nel caso dell'equazione logistica con prelievo.

Esercizio 6 L'equazione

$$q'(t) = f(q(t)) + hq(t)$$

con $h \in \mathbf{R}$, generalizza l'equazione del modello logistico ottenibile nel caso

$$f(q) = -\epsilon \frac{q^2}{k} \qquad \text{e} \qquad h = \epsilon.$$

Indicare alcune ipotesi ragionevoli su f ed h, che garantiscano l'esistenza di un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Esercizio 7 Una popolazione N di individui è soggetta a una malattia infettiva non mortale, in modo che N sia costante nel tempo. Dividendo in due categorie gli individui cosicché $S = S(t)$ è il numero di individui sani (ed eventualmente suscettibili di infezione) ed $I = I(t)$ è il numero di infetti, scrivere il modello di evoluzione della malattia sapendo che: ai fini della trasmissione della malattia solo una percentuale α dei possibili incontri tra infetti e sani nell'unità di tempo risulta efficace; una percentuale β degli infetti diventa sana nell'unità di tempo.

(a) Studiare il diagramma di fase per l'equazione, al variare di α, β ed N, interpretandone i risultati.

(b) Integrare l'equazione, quindi confrontare i risultati che si ottengono calcolando il limite della soluzione per $t \to +\infty$ con quelli ottenuti al punto precedente.

Esercizio 8 Considerare i due modelli seguenti, che descrivono la caduta di un grave di massa m nell'aria:

(a) $v'(t) = g - \dfrac{h}{m} v(t)$

(b) $v' = g - \dfrac{h}{m} v^2(t)$

dove h è una costante positiva e g è l'accelerazione di gravità.

Studiare i diagrammi di fase nei due casi, quindi integrare le equazioni e confrontare, interpretandoli, i risultati ottenuti.

Esercizio 9 [**Velocità di fuga dalla Terra.**] Data la massa M della Terra, R il suo raggio e G la costante di gravitazione, si consideri un corpo di massa m che si trova a distanza $r = R + h$ dal centro del pianeta e che sia soggetto alla forza

$$F = -GM \frac{m}{r^2}$$

di tipo centrale. Ponendo $k = GM$, $m = 1$ ed indicando con $v = v(t) = \dfrac{dr}{dt}$ la velocità del corpo, si ha

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{k}{r^2}$$

ovvero

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{r^2}.$$

Si lanci il corpo verticalmente verso l'alto con velocità iniziale v_0.

(a) Sapendo che per $r = R$, l'accelerazione é $-g$, determinare k in funzione di R e di g.

(b) Calcolare v in funzione di r.

(c) Trovare la velocità di fuga dalla Terra (la velocità v_0 necessaria affinchè il corpo non ritorni più sulla Terra).

Soluzioni.

Esercizio 1 Innanzitutto bisogna tradurre la legge di Fourier in un'equazione differenziale. Indichiamo con $T(t)$ la temperatura di un corpo (in gradi centigradi) all'istante t (in minuti): allora la velocità a cui il corpo si *raffredda* è data da $-dT/dt$. Possiamo quindi scrivere la legge di Fourier come

$$T'(t) = -k(T(t) - T_0),$$

dove T_0 indica la temperatura dell'ambiente e k la costante positiva di proporzionalità. Si noti che, in base a questa legge, se la temperatura del corpo è più alta di quella dell'ambiente il corpo si raffredda, e viceversa se è più bassa il corpo si riscalda. Nel nostro caso si ha $T_0 = 24°$.

In vista dell'applicazione al problema, ricaviamo la soluzione del generico problema di Cauchy:

$$\begin{cases} T'(t) &= -k(T(t) - 24) \\ T(\tau) &= \xi. \end{cases}$$

Utilizzando il metodo di integrazione per equazioni a variabili separabili e sostituendo la condizione iniziale per ricavare la costante di integrazione si ottiene

$$T(t) = 24 + (\xi - 24)e^{-k(t-\tau)}.$$

Indichiamo con $T_f(t)$ la temperatura del caffè di Federico e con $T_g(t)$ la temperatura del caffè di Gianmaria. Si noti che, visto che Federico allunga il caffè a 60° con un'uguale quantità di latte a 16°, la temperatura iniziale del caffè allungato è di 38° (la media aritmetica delle due). Di conseguenza si ha $\tau = 0$, $\xi = 38$, $T_f(t) = 24 + 14e^{-kt}$ e quindi possiamo calcolare la temperatura a cui beve Federico: $T_f(10) = 24 + 14e^{-10k}$.

Passiamo all'altro caso. Per i primi 5 minuti la temperatura del caffè di Gianmaria soddisfa il problema di Cauchy con $\tau = 0$ e $\xi = 60$. Abbiamo quindi $T_g(t) = 24 + 36e^{-kt}$ e $T_g(5) = 24 + 36e^{-5k}$. Nel frattempo il latte si riscalda, perché la sua temperatura è più bassa di quella dell'ambiente: per la temperatura T_l del latte abbiamo $\tau = 0$, $\xi = 16$, $T_l(t) = 24 - 8e^{-kt}$, $T_l(5) = 24 - 8e^{-5k}$. A quel punto Gianmaria mescola il caffè con il latte, ottenendo una miscela avente temperatura $24 + 14e^{-5k}$. Il raffreddamento prosegue sempre secondo la solita legge, e stavolta i dati iniziali sono $\tau = 5$ e $\xi = 24 + 14e^{-5k}$. Abbiamo quindi, per $t \geq 5$, $T_g(t) = 24 + 14e^{-5k} \cdot e^{-k(t-5)}$, per cui $T_g(10) = 24 + 14e^{-10k}$.

I due amici bevono dunque il caffè alla medesima temperatura.

Esercizio 2 Indichiamo con $s(t)$ la quantità di sale (misurata in chilogrammi) presente nella miscela all'istante t (misurato in secondi), e cerchiamo di scrivere un'equazione differenziale per s. In ogni minuto, nella cisterna entrano 0.1 kg di sale. Supponiamo che il sale si misceli istantaneamente in modo uniforme in tutta la cisterna. Ciò significa che all'istante t in un litro di miscela è presente una quantità $s(t)/200$ kg di sale. Quindi la variazione della quantità di sale al minuto è $0.1 - s(t)/200$. In altre parole,

$$s'(t) = 0.1 - \frac{1}{200}s(t).$$

Tale equazione può essere integrata sia come equazione alle variabili separabili, sia come equazione lineare. Ricordando che $s(0) = 0$, si ottiene $s(t) = 20 - 20e^{-t/200}$. Per calcolare il tempo richiesto basta quindi risolvere l'equazione $20 - 20e^{-t/200} = 10$. Perciò basta aspettare $200 \log 2$ minuti.

Esercizio 3 Se 3000 euro vengono investiti al 5% annuo, dopo un anno la cifra accantonata corrisponde a 1+0,05 volte la cifra iniziale, e dopo due anni corrisponderà $1,05 \cdot 1,05$ la cifra iniziale. In questo caso dopo k anni l'investimento sarà diventato pari a $3000 \cdot (1,05)^k$. In generale se A_0 è l'investimento a tasso r, dopo k anni ci sarà stato un accantonamento pari a $A_0(1+r)^k$. Di solito però gli interessi vengono calcolati più frequentemente che una volta alla fine dell'anno, diciamo n volte nel corso di uno stesso anno. Allora in ogni periodo il tasso di interesse è r/n. In questo caso, in k anni ci sono nk periodi, alla fine dei quali il capitale raggiunto è $A_0(1+r/n)^{nk}$ ad esempio, dopo 3 anni al 5% d'interesse, 3000 euro di capitale diventano

$$\begin{array}{rl} 3000(1.05)^3 = 3472.9 \text{ euro} & \text{con interesse composto annualmente} \\ 3000(1.025)^6 = 3479.1 \text{ euro} & \text{con interesse composto semestralmente} \\ 3000(1+0.05/4)^{12} = 3482.3 \text{ euro} & \text{con interesse composto trimestralmente} \\ 3000(1+0.05/12)^{36} = 3484.4 \text{ euro} & \text{con interesse composto mensilmente} \\ 3000(1+0.05/365)^{3\cdot 365} = 3485.5 \text{ euro} & \text{con interesse composto giornalmente} \end{array}$$

Se si vuole sapere il risultato a 2 mesi, si ha

$$\begin{array}{rl} 3000(1+0.05/1)^{2/12} = 3024,5 \text{ euro} & \text{con interesse composto annualmente} \\ 3000(1+0.05/2)^{1/3} = 3024.8 \text{ euro} & \text{con interesse composto semestralmente} \\ 3000(1+0.05/4)^{2/3} = 3024.9 \text{ euro} & \text{con interesse composto trimestralmente} \\ 3000(1+0.05/12)^{2} = 3025.1 \text{ euro} & \text{con interesse composto mensilmente} \\ 3000(1+0.05/365)^{61} = 3025.2 \text{ euro} & \text{con interesse composto giornalmente} \end{array}$$

L'interesse pagato cresce al tendere di n ad infinito, e l'interesse composto in modo continuo sarà

$$\begin{aligned} A(t) &= \lim_{n\to+\infty} A_0 \left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = \lim_{n\to+\infty} A_0 \left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} \\ &= A_0 \left[\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} = A_0 e^{rt} \end{aligned}$$

L'equazione differenziale che descrive il problema si ottiene derivando

$$\frac{dA(t)}{dt} = rA_0e^{rt} = rA(t)$$

Perciò nel caso di interesse composto in modo continuo, 3000 euro investiti a 2 mesi con tasso al 5% diventano $3000 \cdot e^{0.05\frac{61}{365}}$ euro.

Esercizio 4 L'equazione assegnata può rappresentare una particella di massa $m = 1$ vincolata ad una molla con costante elastica $k = 1$ e che subisce un attrito viscoso con un coefficiente di proporzionalità pari a 2β. Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea ha le radici

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}.$$

Distinguiamo i diversi casi in cui le soluzioni del polinomio caratteristico sono reali o complesse.

Se $0 \leq \beta < 1$, gli autovalori del problema sono complessi e coniugati e $\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{1-\beta^2}$, cui corrisponde un integrale generale dell'equazione differenziale omogenea

$$y(t) = e^{-\beta t}\big(c_1 \sin(t\sqrt{1-\beta^2}) + c_2 \cos(t\sqrt{1-\beta^2})\big).$$

Se $\beta = 1$, gli autovalori del problema sono reali e conicidenti e $\lambda_{1,2} = -1$, cui corrisponde un integrale generale dell'equazione differenziale omogenea

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

Se $\beta > 1$, gli autovalori del problema sono reali e distinti e $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}$, cui corrisponde un integrale generale dell'equazione differenziale omogenea

$$y(t) = c_1 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2-1})t} + c_2 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2-1})t}.$$

Risolviamo il problema dell'equazione completa, cercando se esiste una soluzione particolare dell'equazione differenziale della forma

$$u(t) = A\sin t + B\cos t.$$

Una funzione di questo tipo dipende linearmente dall'integrale generale della parte omogenea solo se $\beta = 0$. Supponiamo quindi per ora $\beta > 0$. Il caso $\beta = 0$, che corrisponde ad un caso di risonanza, è trattato nel seguito. Abbiamo

$$\begin{aligned} u(t) &= A\sin t + B\cos t \\ u'(t) &= A\cos t - B\sin t \\ u''(t) &= -A\sin t - B\cos t. \end{aligned}$$

Affinché $u(t)$ risolva l'equazione assegnata, deve essere

$$-A\sin t - B\cos t + 2\beta(A\cos t - B\sin t) + A\sin t + B\cos t = \sin t$$

si ricava

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= -\frac{1}{\beta}. \end{aligned}$$

Se invece $\beta = 0$, verifichiamo per quali valori di A e B la funzione

$$u(t) = t(A\sin t + B\cos t)$$

è integrale particolare dell'equazione

$$\ddot{y} + y = \sin t.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} u(t) &= t(A\sin t + B\cos t) \\ u'(t) &= A\sin t + B\cos t + t(A\cos t - B\sin t) = \\ u''(t) &= 2(A\cos t - B\sin t) + t(-A\sin t - B\cos t). \end{aligned}$$

Affinché $u(t)$ risolva l'equazione assegnata, deve essere

$$2(A\cos t - B\sin t) + t(-A\sin t - B\cos t) + t(A\sin t + B\cos t) = \sin t$$

si ricava

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

L'integrale generale del problema, nel caso $\beta = 0$ è allora

$$y(t) = c_1\sin(t) + c_2\cos(t) - \frac{1}{2}t\sin t.$$

Esercizio 5 È sottinteso che, trattandosi di popolazioni, si considerano valide solo le soluzioni con $P(t) \geq 0$. Nel modello logistico standard l'incremento della popolazione $\dot{P}$ è proporzionale sia alla popolazione P che a $k - P$. Come visto in classe, k rappresenta un valore soglia, nel senso che, quando P è vicina a k, $\dot{P}$ è piccola e quindi la popolazione tende a non variare (si può immaginare che, per P vicino a k, tutto lo "spazio abitabile" sia esaurito e quindi che la popolazione non tenda a crescere ulteriormente). In questo senso si dice che k è un punto di equilibrio ($P \equiv K$ implica $\dot{P} \equiv 0$); se ad un certo istante t_0 si ha $0 < P(t_0) < k$ allora la popolazione cresce tendendo a k, se $P(t_0) > k$ allora la popolazione decresce indefinitamente tendendo a k, e quindi k é asintoticamente stabile.

Nel caso con prelievo il modello può essere interpretato come segue: oltre alla dinamica interna data dal modello precedente, un "agente esterno" preleva dalla popolazione h individui nell'unità di tempo (è il caso, ad esempio, di un allevamento). In questo caso k non è più un punto di equilibrio. L'equazione è alle variabili separabili (in effetti è autonoma) e quindi è possibile integrarla e studiarne direttamente le soluzioni. Per i nostri scopi, però, è sufficiente studiare il segno di $\dot{P}$ e tenere presente che se P è definita su tutto $\mathbf{R}$ ed ha un asintoto orizzontale, allora tale asintoto corrisponde ad un punto di equilibrio (vedi l'esercizio seguente per i dettagli). Cerchiamo quindi i valori di P per cui si ha

$$\dot{P} = -\frac{\epsilon}{k}P^2 + \epsilon P - h \geq 0.$$

Si hanno tre casi, a seconda che il discriminante del polinomio sia negativo, nullo o positivo.

- $h > \frac{\epsilon k}{4}$: per ogni P si ha $\dot{P} < 0$. Quindi non esistono punti di equilibrio e, qualunque sia la popolazione iniziale, si ha l'estinzione in tempo finito: la quantità di individui prelevati nell'unità di tempo (cioè h) è troppo grande e la popolazione non riesce a riprodursi abbastanza velocemente per rimpiazzarli.
- $h = \frac{\epsilon k}{4}$: $\dot{P}$ si annulla solo per $P = k/2$, e $\dot{P} < 0$ altrimenti. Quindi se $P(t_0) > k/2$ allora la popolazione decresce in modo monotono tendendo asintoticamente a $k/2$ (si ricordi che $P(t)$ non può intersecare la retta a quota $k/2$ per unicità della soluzione del problema di Cauchy). Se $0 < P(t_0) < k/2$ la popolazione si estingue in tempo finito come nel caso precedente.
- $h < \frac{\epsilon k}{4}$: si hanno due punti di equilibrio corrispondenti ai valori

$$P_- = \frac{k}{2} - \sqrt{\frac{k}{\epsilon}\left(\frac{\epsilon k}{4} - h\right)},$$

$$P_+ = \frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k}{\epsilon}\left(\frac{\epsilon k}{4} - h\right)}.$$

  Si verifica facilmente che entrambi questi valori sono positivi. Se $P(t_0) > P_+$ allora $P(t)$ decresce tendendo asintoticamente a P_+. Se $P_- < P(t_0) < P_+$ allora $P(t)$ cresce tendendo asintoticamente a P_+, che quindi è un equilibrio asintoticamente stabile (al contrario, P_- è chiaramente instabile). Se $0 < P(t_0) < P_-$ allora la popolazione si estingue in tempo finito.

Si noti che in questo esercizio lo spazio delle fasi è la semiretta $\mathbf{R}^+$ dei numeri reali positivi, per cui, per lo studio del diagramma di fase, basta riportare le considerazioni fatte sulla semiretta.

Esercizio 6 Cerchiamo di offrire una trattazione più generale di quella richiesta dal problema, per cui poniamo $f(q) + hq = g(q)$ e consideriamo l'equazione autonoma

$$\dot{q}(t) = g(q(t)).$$

Si può dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA: siano g una funzione di classe C^1 (in modo che valga il teorema di esistenza ed unicità locale per i problemi di Cauchy) e $q_0 \in \mathbf{R}$ tale che $g(q_0) = 0$, g è positiva in un intorno sinistro di q_0 e negativa in un suo intorno destro (alternativamente, $g'(q_0) < 0$ oppure $g'(q_0) = 0$ e q_0 è un punto di flesso discendente per g). Allora q_0 è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Dimostrazione: visto che $g(q_0) = 0$ chiaramente q_0 è un punto di equilibrio e $q(t) \equiv q_0$ è una soluzione costante dell'equazione. Supponiamo che $g(q)$ sia positiva su $(q_0 - \delta, q_0)$ per un certo δ positivo, e sia $\bar{q}$ un punto di tale intorno sinistro di q_0. Dire che q_0 è asintoticamente stabile equivale a dire che la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $q(t_0) = \bar{q}$ tende a q_0 per $t \to +\infty$ (si può ragionare analogamente per l'intorno destro). Dimostriamolo. Dato il segno di g, abbiamo che $q(t)$ è crescente finché è più piccola di q_0; d'altra parte non può intersecare la retta $q = q_0$ per unicità, e quindi non può avere asintoti verticali. Se ne deduce che $q(t)$ è definita e monotona crescente su $[t_0, +\infty)$, con $\bar{q} \leq q(t) < q_0$.Una funzione monotona e limitata ammette limite (cioè asintoto orizzontale). Indichiamo con q_* tale limite. Chiaramente $\bar{q} < q_* \leq q_0$. La nostra tesi equivale a dire che $q_* = q_0$. Supponiamo quindi per assurdo che $q_* \neq q_0$. Abbiamo che per $t \to +\infty$ $q(t) \to q_*$ e quindi, sostituendo nell'equazione, $\dot{q}(t) \to g(q_*) \neq 0$ per ipotesi. Ma ciò è assurdo, in quanto in presenza di un asintoto orizzontale se la derivata ammette limite allora tale limite deve essere 0. Questo conclude la dimostrazione.

Tornando al nostro caso, per assicurare l'esistenza di un punto di equilibrio asintoticamente stabile è sufficiente quindi dare condizioni in modo che il grafico della funzione $y = f(q)$ intersechi la retta $y = -hq$ dall'alto verso il basso. Ad esempio basta che $f(0) = 0$, $f'(0) > -h$, $f(q) < -hq$ per $q \to +\infty$. Si può vedere che l'equazione logistica soddisfa queste condizioni.

Esercizio 7 Si tratta di scrivere l'equazione differenziale associata al modello. L'osservazione principale in questo senso è quella che il numero dei possibili incontri nell'unità di tempo è semplicemente $I(t) \cdot S(t)$ (stiamo supponendo che ogni individuo sano possa incontrare ogni individuo infetto). Quindi l'incremento degli infetti nell'unità di tempo è dato dal termine che dipende dai possibili incontri ($\alpha I(t)S(t)$) e dal termine dovuto alle guarigioni ($-\beta I(t)$). Ricordando che $I(t) + S(t) = N$

$$\dot{I}(t) = \alpha I(t)S(t) - \beta I(t) = (\alpha N - \beta)I(t) - \alpha I(t)^2.$$

(a) Per l'analisi del diagramma di fase dobbiamo calcolare i punti di equilibrio ed il segno di $\dot{I}$ in funzione di I (si noti che l'equazione è di tipo logistico). Ponendo $\dot{I} = 0$ otteniamo i due punti di equilibrio $I = 0$ ed $I = N - \beta/\alpha$. Ricordando che siamo interessati solo alle soluzioni non negative, abbiamo i due casi.

Se $N - \dfrac{\beta}{\alpha} \leq 0$: per ogni condizione iniziale positiva la soluzione corrispondente decresce tendendo asintoticamente a 0, che è un equilibrio asintoticamente stabile (nel caso $N - \beta/\alpha = 0$ è stabile solo da destra).

Se $N - \dfrac{\beta}{\alpha} > 0$: le soluzioni con condizione iniziale $I(t_0) > N - \beta/\alpha$ decrescono monotonamente, quelle con condizione iniziale $0 < I(t_0) < N - \beta/\alpha$ crescono monotonamente, e tutte tendono a $N - \beta/\alpha$ che è un punto di equilibrio asintoticamente stabile (mentre 0 in questo caso è instabile).

(b) L'integrazione dell'equazione è lasciata per esercizio al lettore.

Esercizio 8 Parliamo di caduta di gravi, quindi consideriamo le soluzioni con v positiva (orientata verso la Terra). Analoghi ragionamenti valgono comunque anche per v negativa.

(a) mg/h è un punto di equilibrio asintoticamente stabile. Le soluzioni con dato iniziale maggiore del valore di equilibrio decrescono, quelle con dato iniziale inferiore crescono.

(b) $(mg/h)^{1/2}$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile. Le soluzioni con dato iniziale maggiore del valore di equilibrio decrescono, quelle con dato iniziale inferiore crescono.

Integrazione delle equazioni. L'equazione

$$v'(t) = g - \frac{h}{m}v(t)$$

è lineare a coefficienti costanti del primo ordine. L'equazione omogenea associata é:

$$v'(t) + \frac{h}{m}v(t) = 0.$$

Si ottiene subito che una generica soluzione dell'omogenea data da $v_0(t) = ce^{-\frac{h}{m}t}$, con c costante arbitraria in $\mathbb{R}$.

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo $v_p(t) = a$, per ogni t. Dobbiamo ottenere $v_p'(t) = g - \frac{h}{m}v_p(t)$, quindi $a = \frac{gm}{h}$. L'integrale generale dell'equazione non omogenea é dunque:

$$v(t) = cv_0(t) + v_p(t) = ce^{-\frac{h}{m}t} + \frac{gm}{h}.$$

L'equazione

$$v' = g - \frac{h}{m}v^2(t)$$

è a variabili separabili. Con qualche calcolo la si può riscrivere come

$$\frac{dv}{v^2 - (mg/h)} = -\frac{hdt}{m},$$

da cui, integrando e ricavando v, si ottiene la soluzione

$$v(t) = \Big(\frac{mg}{h}\Big)^{1/2} \frac{1 + Ce^{-2t(\frac{mg}{h})^{1/2}}}{1 - Ce^{-2t(\frac{mg}{h})^{1/2}}}.$$

Esercizio 9 (a) Dalla legge di Newton $F = ma = -mg$ e dalla

$$F = -GM\frac{m}{R^2}$$

otteniamo nel caso $r = R$

$$-mg = -GM\frac{m}{R^2} = -k\frac{m}{R^2},$$

da cui $k = gR^2$.

(b) Calcoliamo v in funzione di r. Per la regola di derivazione delle funzioni composte

$$\frac{dv(r(t))}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dr}.$$

Inoltre sappiamo che $\dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{k}{r^2}$ da cui ricaviamo

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{k}{r^2}.$$

Abbiamo ottenuto un'equazione differenziale a variabili separabili

$$vdv = -\frac{k}{r^2}dr.$$

Integrando si ottiene:

$$v^2 = 2\frac{k}{r} + c,$$

con c costante arbitraria. Sapendo che $v(R) = v_0$, $c = {v_0}^2 - 2\frac{k}{R}$, da cui:

$$v(r) = \left(2k\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) + {v_0}^2\right)^{1/2} = \left(\frac{2gR(R-r)}{r} + {v_0}^2\right)^{1/2}.$$

(c) Trovare la velocità di fuga dalla Terra (la velocità v_0 necessaria affinchè il corpo non ritorni più sulla Terra).
L'altezza massima h raggiunta dal corpo di massa m si determina ponendo a zero la velocitá $v(r)$, con $r = R + h$.

$$v(R+h) = \left(-\frac{2gRh}{R+h} + {v_0}^2\right)^{1/2} = 0 \iff v_0 = \left(\frac{2gRh}{R+h}\right)^{1/2}.$$

Vogliamo che il corpo non torni più sulla terra, imponiamo che l'altezza massima raggiunta vada all'infinito, quindi la velocitá di fuga dalla terra v_f sará data da:

$$v_f = \lim_{h\to+\infty} v_0 = \lim_{h\to+\infty}\left(\frac{2gRh}{R+h}\right)^{1/2} = (2gR)^{1/2}.$$

CAPITOLO 4

Sistemi lineari a coefficienti costanti

1. Ripasso di algebra lineare

Esercizi.

Esercizio 1 Determinare autovalori ed autovettori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

quindi discutere la regolarità degli autovalori.

Esercizio 2 La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ammette almeno tre autovettori linearmente indipendenti? Ne ammette più di tre? Fornire degli esempi.

Esercizio 3 Determinare per quali valori del parametro a la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

ha autovalori distinti. Per quali valori di a gli autovalori sono regolari. Quando possibile trovare la matrice S che diagonalizza A.

Esercizio 4 Per quali valori del parametro reale β la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

è simile ad una matrice diagonale (ovvero è diagonalizzabile)? Trovare una matrice diagonale D simile ad A e la matrice S che permette il passaggio dall'una all'altra.

Soluzioni.

Esercizio 1 Per trovare gli autovalori della matrice occorre risolvere l'equazione $\det(\lambda \mathbf{I} - A) = 0$, ovvero

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice è triangolare, quindi il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale: $(\lambda - 1)^2(\lambda - 2) = 0$, le cui soluzioni sono $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica 1.

Gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 2$ sono le soluzioni del sistema $A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$, ovvero

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 0 & -1 \\ 0 & 2-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 0.$$

Solo le prime due righe del sistema sono linearmente indipendenti, quindi quanto scritto sopra è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è il sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ generato dal vettore

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e dalle sue combinazioni lineari. Tale sottospazio vettoriale ha ovviamente dimensione 1. La molteplicità algebrica e geometrica dell'autovalore $\lambda = 2$ perciò coincidono.

Gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 1$ sono le soluzioni del sistema $A\mathbf{x} = 1\mathbf{x}$, ovvero

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 & -1 \\ 0 & 1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = 0.$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema ha rango 1, solo una riga è linearmente indipendente dalle altre, perciò il sistema è equivalente all'equazione

$$x_3 = 0$$

le cui soluzioni, nello spazio tridimensionale $\mathbf{R}^3$ sono date dal sottospazio vettoriale generato dalle combinazioni lineari dei vettori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi, la dimensione geometrica dell'autovalore $\lambda = 1$ è 2. Poiché entrambi gli autovalori hanno dimensione geometrica uguale alla dimensione algebrica, sono entrambi regolari.

Esercizio 2 Una matrice B non può avere un numero di autovettori linearmente indipendenti maggiore della dimensione dello spazio dove sono ambientati. La matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ha autovalori $\lambda = 1, 2, 3$ cui corrispondono, rispettivamente, gli autovettori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

che costituiscono una base di $\mathbf{R}^3$. Ma tutte le volte che una matrice ha autovalori regolari, gli autovettori associati costituiscono un sistema di generatori dello spazio.

Consideriamo la matrice A assegnata nell'esercizio. I suoi autovalori sono $\lambda = 0$ autovalore con molteplicità algebrica 2, e $\lambda = 3$ con molteplicità algebrica 1. Gli autovettori associati all'autovalore $\lambda = 0$ sono le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

banalmente equivalente alla sola equazione $x_1 = -x_2 - x_3$. Se ne deduce che un sistema di generatori dell'autospazio associato è dato dai vettori

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

L'autovettore $\lambda = 0$ ha molteplicità algebrica pari alla geometrica ed è allora regolare. Essendo semplice è regolare anche l'autovalore $\lambda = 3$ (non c'è bisogno di verificarlo). Concludiamo allora che la matrice A ammette tre autovettori linearmente indipendenti.

Non sempre peròil numero degli autovettori linearmente indipendenti di una matrice uguaglia la dimensione dello spazio in cui sono ambientati. Si pensi al caso più semplice di autovalore non regolare: la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ha autovalore doppio $\lambda = 1$. Gli autovettori a lui associati sono le soluzioni del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_1 \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$

ovvero il sottospazio di $\mathbf{R}^2$ generato dal vettore

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3 La matrice A è triangolare superiore: gli autovalori sono gli elementi della diagonale. Per $a \neq 1, -1$ gli autovalori sono distinti e, quindi, regolari. Verifichiamo se per $a = 1$ l'autovalore $\lambda = 1$ è regolare. L'autospazio ad esso associato è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = x_1 \\ -x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

ovvero dallo spazio vettoriale che ha il vettore

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

come generatore. La molteplicità geometrica dell'autovalore è 1; l'autovalore non è regolare. Se $a = -1$, l'autospazio associato all'autovalore $\lambda = -1$ è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = -x_1 \\ -x_2 = -x_2 \\ -x_3 = -x_3 \end{cases}$$

ovvero dallo spazio vettoriale che ha i vettori

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

come generatori. In questo caso l'autovalore $\lambda = -1$ ha molteplicità geometrica 2, pari alla molteplicità algebrica. L'autovalore è regolare.

Esercizio 4 Calcoliamo gli autovalori della matrice A:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - A) = \begin{bmatrix} \lambda & -\beta & -5 \\ 0 & \lambda - 5 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = (\lambda - 5)^2(\lambda + 2).$$

L'autovalore $\lambda = -2$ è semplice, e conseguentemente regolare. L'autospazio ad esso associato è dato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \beta x_2 + 5x_3 = -2x_1 \\ 5x_2 = -2x_2 \\ 2x_1 + 3x_3 = -2x_3 \end{cases}$$

ovvero dallo spazio vettoriale che ha come generatore, ad esempio, il vettore $\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Cerchiamo l'autospazio associato all'autovalore $\lambda = 5$, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \beta x_2 + 5x_3 = 5x_1 \\ 5x_2 = 5x_2 \\ 2x_1 + 3x_3 = 5x_3 \end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases} -5x_1 + \beta x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} .$$

Se $\beta = 0$, l'autovalore $\lambda = 5$ ha molteplicità geometrica 2, e l'autospazio ad esso associato ha generatori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se $\beta \neq 0$,, l'autovalore $\lambda = 5$ ha molteplicità geometrica 1, e l'autospazio ad esso associato ha come generatore $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. È possibile diagonalizzare una matrice con autovalori regolari: la matrice S che realizza la diagonalizzazione è data dall'accostamento di autovalori indipendenti. La matrice A è diagonalizzabile solo se $\beta = 0$. Sia dunque

$$S = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui

$$S^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

è facile verificare che

$$S^{-1}AS = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Esercizi proposti.

Esercizio Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ definita da

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Trovare gli autovalori e l'autospazio associato a ciascuna autovalore.

Esercizio Data

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

trovare autovalori ed autovettori e se possibile una matrice diagonale D simile ad A.

Esercizio Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

associata alla trasformazione $F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$. Trovare una base di $\ker(f)$ ed $\mathrm{Im}(f)$. Determinare i sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$ di vettori che non vengono ruotati da f.

Esercizio Dopo aver trovato la matrice P che porta $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ in forma diagonale $D = P^{-1}AP$, sfruttare la relazione $D = P^{-1}AP$ per calcolare A^6.

Esercizio Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 9 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ determinare la dimensione ed una base degli autospazi associati a ciascun autovalore.

Esercizio Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

trovare il determinante, autovettori ed autospazi associati. Calcolare quindi il determinante, gli autovalori e gli autospazi della matrice che si ottiene da A scambiando la prima riga con l'ultima.

Esercizio Studiare la regolarità degli autovalori di

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A è diagonalizzabile?

Esercizio Data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
trovare una base di $\mathbf{R}^3$ di autovettori di A.

Esercizio Data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
studiare la regolaritå degli autovalori.

Esercizio Per quali valori del parametro k la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ k & 0 & 2 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile? Trovare gli autovettori associati.

2. Sistemi omogenei: la matrice esponenziale

Esercizi.

Esercizio 1 Calcolare e^{At} dove
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$
Risolvere il problema di Cauchy $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2 Precisare quale è la struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo. Dato il sistema
$$\begin{cases} x' &= 3x - 2y \\ y' &= 6x - 4y \end{cases}$$
se ne determinino i punti critici e si disegnino le traiettorie nel piano delle fasi.

Esercizio 3 Dato il sistema lineare di equazioni differenziali
$$\begin{cases} \dot{x} &= x + 3\alpha y \\ \dot{y} &= x - y \end{cases}$$
determinino al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ i punti critici del sistema e se ne discuta la natura. Si risolva quindi il sistema nel caso $\alpha = 3$ e $\alpha = -\frac{1}{3}$.

Soluzioni.

Esercizio 1 La matrice A è triangolare bassa; i suoi autovalori (regolari poiché semplici) sono $(1, -2)$. Autovettore associato a $\lambda = 1$ è $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Autovettore associato a $\lambda = -2$ è $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Accostando gli autovettori trovati si costruisce la matrice $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e si ricava che $S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, da cui

$$S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

La matrice esponenziale e^{At} si calcola allora come

$$\begin{aligned} e^{At} &= S\mathrm{diag}(e^{\lambda_i t})S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ e^t - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Il problema $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$ ha soluzione

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t + e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2 Per il principio di sovrapposizione, l'integrale generale di un sistema di equazioni differenziali lineare omogeneo di ordine n è dato dalla combinazione lineare di n soluzioni particolari del sistema purché linearmente indipendenti.

I punti critici del sistema rappresentano le soluzioni stazionarie. In questo caso sono le soluzioni del sistema

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ovvero la retta $y = 3/2x$. Si deduce anche immediatamente che un autovalore è nullo. L'altro autovalore è -1, cui è associato l'autovettore $y = 2x$. Abitualmente gli autovettori di un sistema lineare sono le uniche traiettorie rettilinee. Ma in questo caso il sistema è degenere ($\det(A) = 0$) e le traiettorie rettilinee sono infinite. Per integrare il sistema, escludendo i punti $3x - 2y = 0$ possiamo scriverlo nella forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x - 2y}{2(3x - 2y)} = \frac{1}{2}$$

che integrato dá il fascio di rette $y = 2x + C$. Alternativamente, possiamo utilizzare il metodo della matrice esponenziale, costruendo S accostando due autovettori linearmente indipendenti (perché relativi ad autovalori diversi)

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice dei coefficienti viene dunque diagonalizzata da S:

$$\widetilde{A} = S^{-1}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Per definizione di matrice esponenziale

$$e^{\widetilde{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\widetilde{A}t)^k}{k!} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-t)^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Ancora, per definizione di matrice esponenziale

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(S\widetilde{A}S^{-1})^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} S\frac{(\widetilde{A}t)^k}{k!}S^{-1} = Se^{\widetilde{A}t}S^{-1}.$$

L'integrale generale del problema è poi dato dalla matrice esponenziale moltiplicata per un vettore di costanti. Si ricava che

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= Se^{\widetilde{A}t} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \\ &= c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Si osservi infine che sostituendo e^{-t} nelle due equazioni si trova $y = 2x - c_1$, in accordo con l'equazione delle traiettorie trovata in precedenza.

Esercizio 3 Se $\det A \neq 0$ l'unico punto critico del sistema è l'origine. Sia $\det A \neq 0$ ovverosia $\alpha \neq -\frac{1}{3}$. Se $\alpha < -\frac{1}{3}$, gli autovalori sono distinti ed immaginari puri e l'origine è centro stabile (non asintoticamente) e le traiettorie sono delle ellissi (si possono ricavare calcolando un integrale primo del sistema, $E(x,y) = x^2 - 2xy - 3\alpha y^2 + C$). Se $\alpha > -\frac{1}{3}$, gli autovalori sono reali distinti ed opposti in segno. L'origine è quindi una sella. Il caso $\alpha = 3$ rientra in questa situazione. Gli autovalori sono $\lambda_{1,2} = \sqrt{10}, -\sqrt{10}$ e gli autovettori associati rispettivamente

$$\begin{bmatrix} 1+\sqrt{10} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1-\sqrt{10} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I punti $y = -\frac{1}{9}x$ hanno tangente verticale. I punti $y = x$ hanno tangente orizzontale. L'integrale generale è

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{10} & 1-\sqrt{10} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\sqrt{10}t} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{10}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Se $\alpha = -\frac{1}{3}$, l'insieme dei punti critici è dato dai punti appartenenti alla retta $x - y = 0$ (ovvero dall'autovettore dell'autovalore nullo). Le traiettorie non costanti si possono ricavare osservando che il sistema può essere ricondotto all'equazione $\frac{dy}{dx} = 1$, che risolta conduce al fascio improprio di rette $y = x + C$. Ogni retta del fascio con costante C non nulla è una traiettoria del sistema. Ogni punto della retta $y = x$ è un punto stazionario (instabile) per il sistema.

Il caso $\alpha = -\frac{1}{3}$ è un caso di autovalore multiplo (non regolare):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_{1,2} = 0, \qquad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

In questi casi la matrice A non può essere diagonalizzata in modo usuale, ma siccome il fine della diagonalizzazione è -di fatto- quello di scrivere la matrice esponenziale relativa al sistema, si può sfruttare un'altra proprietà di A: $A^2 = 0$ (si dice che una matrice è nihilpotente se sono nulle le sue potenze da un certo ordine in poi). Usando la definizione di matrice esponenziale, quindi

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{k=0,\cdots,\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0,1} \frac{(At)^k}{k!} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'integrale generale del sistema risulta dunque essere il seguente

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_1 - c_2)t + c_1 \\ (c_1 - c_2)t + c_2 \end{bmatrix}$$

da cui sostituendo $(c_1 - c_2)t$ in entrambe le equazioni, si ottiene l'equazione delle traiettorie $y(t) = x(t) + c_2 - c_1$, analoga a quella già trovata per integrazione diretta.

3. Sistemi omogenei: classificazione delle traiettorie

Esercizi.

Esercizio 1 Studiare la natura dell'origine per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2 Dato il sistema lineare di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' &= x + y + z \\ y' &= -x + 4y + 4z \\ z' &= -x + y + 3z \end{cases}$$

se ne determini l'integrale generale e si studi la stabilità della soluzione nulla.

Esercizio 3 Dato il sistema lineare di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' &= x + 2y \\ y' &= 2x + y \end{cases}$$

(a) si determini l'integrale generale
(b) si studi la natura del punto critico
(c) si studino qualitativamente le traiettorie precisando i punti a tangenza orizzontale e quelli a tangenza verticale e eventuali punti di flesso.

Esercizio 4 Dato il sistema lineare di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} &= -3x \\ \dot{y} &= 3y - 2z \\ \dot{z} &= y + z \end{cases}$$

si dica se l'origine è un punto di equilibrio stabile o instabile. Quindi scrivere l'integrale generale del sistema.

Soluzioni.

Esercizio 1 Occorre innanzitutto discutere l'equazione caratteristica della matrice A: $\lambda^2 - \lambda(2 + a) + 2a - 1$, dove ovviamente $(2 + a) = \text{tr}(A)$ e $(2a - 1) = \det(A)$. Osserviamo che gli autovalori sono sempre reali e distinti. Se $a > 1/2$ entrambi gli autovalori sono positivi, quindi l'origine è un nodo instabile. Se $a < 1/2$ un autovalore è positivo ed uno negativo. L'origine è in questo caso una sella.

Studiamo in dettaglio il caso $a = 1/2$, ossia quello per il quale $\det(A) = 0$. Si deduce subito che $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5/2$. Se $\det(A) = 0$, il sistema lineare ha un luogo di punti stazionari, dato dalle soluzioni dell'equazione $A\mathbf{x} = 0$, cioè l'insieme che soddisfa l'equazione $x + 2y = 0$. Le soluzioni di questo problema rappresentano anche gli autovettori associati all'autovalore nullo. Gli autovettori associati, rispettivamente, al primo ed al secondo autovalore sono infatti $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Per integrare il sistema, è possibile riscriverlo nella forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{x_1}{2} + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che

$$\frac{dx_2}{dx_1} = 2$$

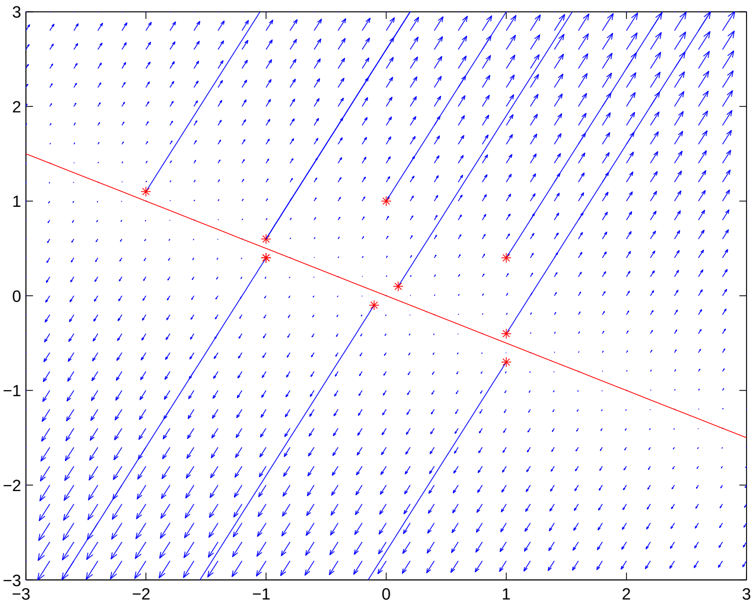

FIGURA 1. La retta rossa rappresenta l'insieme dei punti stazionari instabili. Sono rappresentate alcune soluzioni al problema di Cauchy indicato dall'asterisco.

che integrata dá l'insieme della traiettorie del sistema $x_2 = 2x_1 + C$. Ogni punto della retta luogo dei punti critici è instabile; per ogni punto critico passano tre orbite. In Figura 1 sono riportate alcune traiettorie soluzioni del problema.

Esercizio 2 Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Si ricava che gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$. La soluzione nulla è instabile. Gli autovettori associati agli autovalori, ovvero le traiettorie rettilinee del sistema, sono rispettivamente

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La soluzione è allora

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = Se^{\text{diag}(\lambda_i)}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3 Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) L'integrale generale del problema è $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{c}$. Per scrivere la matrice esponenziale, occorre diagonalizzare A. Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, cui

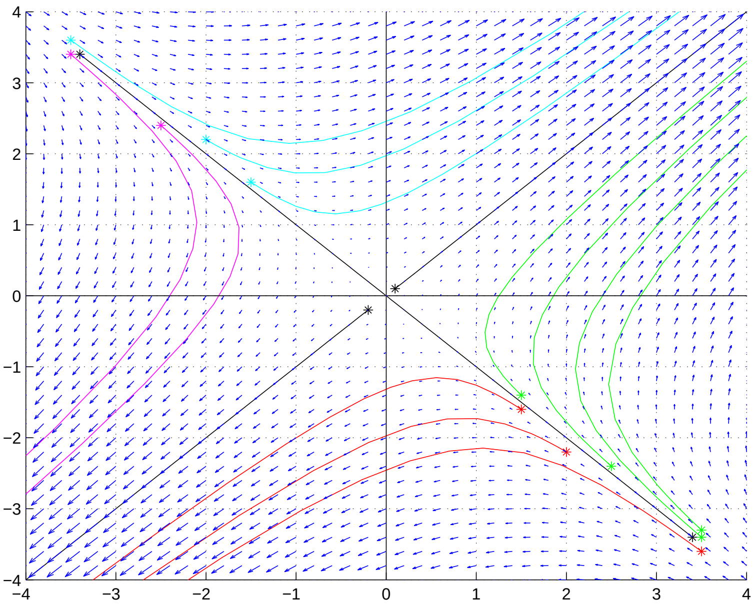

Figura 2. L'origine è una sella. Con $*$ sono indicati alcuni problemi di Cauchy. In nero sono visibili le traiettorie rettilinee.

rispettivamente si associano gli autovettori

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Gli autovettori rappresentano le traiettorie rettilinee del sistema. Si ricava allora che

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = Se^{\operatorname{diag}(\lambda_i)}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

(b) Siccome gli autovalori sono reali opposti in segno, l'origine (unico punto critico) è una sella.

(c) Si confronti con la Figura 2 per avere un'idea qualitativa delle traiettorie. Il luogo dei punti a tangente orizzontale deve soddisfare il requisito $dy = 0$ ovverosia $2x + y = 0$. Il luogo dei punti a tangente verticale deve soddisfare il requisito $dx = 0$ ovverosia $x + 2y = 0$. Derivando l'espressione

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{x+2y}$$

si ottiene che il luogo dei punti di flesso è l'asse $y = 0$.

Esercizio 4 Data

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

i suoi autovalori sono $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2 - \mathrm{i}$, $\lambda_3 = 2 + \mathrm{i}$ e gli autovettori associati rispettivamente

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1-\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1+\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I due autovettori complessi e coniugati possono essere scritti come

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \pm \mathrm{i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{b} \pm \mathrm{i}\mathbf{c}$$

la matrice S che diagonalizza A è data dall'accostamento dei vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e la matrice diagonalizzata cui si perviene è

$$\widetilde{A} = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si ottiene

$$e^{\widetilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t}\cos t & -e^{2t}\sin t \\ 0 & e^{2t}\sin t & e^{2t}\cos t \end{bmatrix}.$$

L'integrale generale del problema dunque può essere scritto come

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = Se^{\widetilde{A}t} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-3t} \\ e^{2t}\cos t(c_2 + c_3) + e^{2t}\sin t(c_2 - c_3) \\ c_2 e^{2t}\sin t + c_3 e^{2t}\cos t \end{bmatrix}.$$

Questa scrittura non è di untilità per determinare l'andamento qualitativo dell'insieme delle traiettorie. Se proiettiamo una traiettoria sul piano yz bisogna ottenere un fuoco instabile, mentre c'è stabilità della proiezione della stessa traiettoria sull'asse x; ciò significa che la particella che segue tale traiettoria si avvicina al piano yz per $t \to +\infty$.

4. Sistemi nonomogenei

Esercizi.

Esercizio 1 Assegnato

$$\begin{cases} x' &= -x - 3 \\ y' &= -y + \alpha x + 3 \end{cases}$$

dove $\alpha \in \mathbf{R}$, si determinino le soluzioni stazionarie del sistema, studiandone la stabilità, disegnare inoltre le orbite nel piano delle fasi nell'intorno dei punti critici.

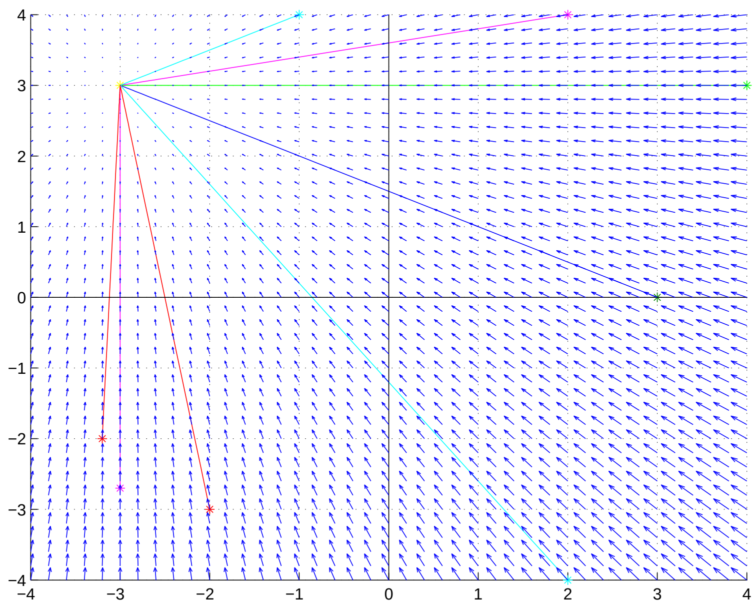

FIGURA 3. Nodo a stella stabile centrato nel punto $(-3, 3)$, nel caso $\alpha = 0$.

Soluzioni.

Esercizio 1 Sia

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix}.$$

Si ricava $\det(A) = 1$ e $\lambda = -1$ autovalore doppio. Il punto critico di questo problema è $(-3, 3 - 3\alpha)$. Con la sostituzione

$$\begin{cases} u = x + 3 \\ v = y - 3(1 - \alpha) \end{cases}$$

ci si riconduce a studiare il sistema

$$\begin{cases} u' = -u \\ v' = \alpha u - v \end{cases}$$

Se $\alpha = 0$, l'autovalore $\lambda = -1$ è regolare ovvero è doppia la dimensione dell'autospazio associato. Siccome siamo in dimensione 2, ogni traiettoria rettilinea del piano uv passante dall'origine è una soluzione del problema. In Figura 3 sono rappresentate alcune traiettorie nel piano xy.

Se $\alpha \neq 0$, l'autovalore non è regolare ed esiste solo una traiettoria rettilinea, data dalla direzione $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. L'origine del piano uv è un centro stabile. Le traiettorie sono tangenti alla direzione $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Si può anche osservare che le equazioni del sistema sono disaccoppiate, e dunque facili da integrare, infatti con i dati iniziali u_0, v_0, si ricava

$$\begin{cases} u(t) = e^{-t} u_0 \\ v(t) = v_0 e^{-t} + \alpha u_0 t e^{-t} \end{cases}.$$

Le soluzioni nel piano xy con $\alpha = 1$ sono rappresentate in Figura 4.

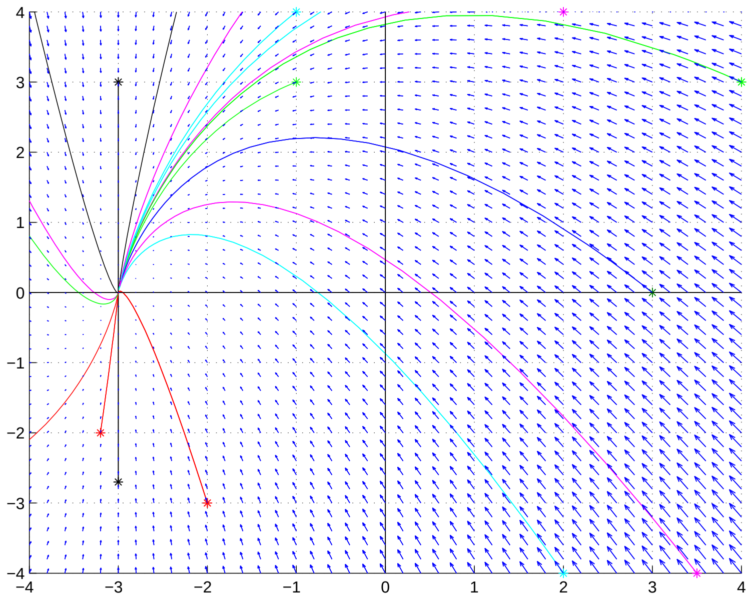

FIGURA 4. Centro stabile in $(-3, 0)$, caso $\alpha = 1$.

CAPITOLO 5

Temi d'esame risolti

Lo studente è invitato a provare a risolvere gli esercizi dei Tema d'Esame in modo autonomo, utilizzando la Soluzione qui riportata come confronto solo dopo aver elaborato nei dettagli la risoluzione degli esercizi.

Tutte le giustificazioni di carattere teorico, relative alla buona positura, eventualmente alla prolungabilità delle soluzioni, all'esistenza di traiettorie rettilinee etc. fanno -ovviamente- parte integrante dello svolgimento dell'esercizio, e devono perció essere correttamente motivate.

. ——————————— .

7 maggio 2002

Esercizio 1. Studiare le soluzioni dell'equazione (sistema conservativo ad un grado di libertà)

$$y''(t) + ky(t) = \cos \omega t, \qquad k, \omega > 0$$

al variare dei parametri ω e k e dare un'interpretazione fisica del risultato.

Soluzione. Studiamo dapprima il problema omogeneo assegnato

$$y''(t) + ky(t) = 0$$

cui sono associati gli autovalori $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\sqrt{k}$. L'integrale generale del problema omogeneo risulta allora

$$y(t) = C_1 \cos(\sqrt{k}t) + C_2 \sin(\sqrt{k}t) = A \cos(\sqrt{k}t + \phi)$$

con C_1, C_2 oppure A, ϕ costanti da determinarsi in seguito imponendo le condizioni iniziali. Per studiare le soluzioni dell'equazione completa occorre distinguere i casi $\omega \neq \sqrt{k}$, e $\omega = \sqrt{k}$.

Se $\omega \neq \sqrt{k}$, come integrale particolare del problema completo si può considerare una funzione della forma $y(t) = P\cos(\omega t) + Q \sin(\omega t)$. Per determinare le costanti P e Q imponiamo, appunto, che risolva l'equazione completa, ottenendo $P = \dfrac{1}{k - \omega^2}$ e $Q = 0$. L'integrale generale del problema completo è quindi

$$y(t) = C_1 \cos(\sqrt{k}t) + C_2 \sin(\sqrt{k}t) + \frac{\cos(\omega t)}{k - \omega^2}.$$

Se $\omega = \sqrt{k}$ (risonanza), come integrale particolare del problema completo utilizziamo una funzione della forma $y(t) = Pt\cos(\omega t) + Qt\sin(\omega t)$. Imponendo che la funzione risolva l'equazione completa, si ricavano i valori delle costanti P e Q: $P = 0$ e $Q = \frac{1}{2\omega}$. L'integrale generale del problema completo è quindi

$$y(t) = C_1 \cos(\sqrt{k}t) + C_2 \sin(\sqrt{k}t) + \frac{t \sin(\sqrt{t})}{2\sqrt{k}}.$$

Il problema assegnato può essere interpretato da un punto di vista meccanico, come l'equazione descrivente il moto di un punto di massa unitaria soggetto ad una forza centrale elastica attrattiva, con costante elastica pari a $k > 0$, proporzionale alla distanza dall'origine del sistema di riferimento in cui la massa è situata, moto che avviene senza attrito. La vibrazione è forzata da una forza esterna sinusoidale pari a $\cos \omega t$. Il caso in cui $\omega = \sqrt{k}$ corrisponde ad una condizione di risonanza tra le vibrazione proprie del sistema e di quelle dovute alla presenza di un termine forzante.

Il problema assegnato può essere ulteriormente interpretato dal punto di vista elettrotecnico come la corrente che fluisce in un circuito senza resistenze, con un'induttanza unitaria ed una capacità $C = \frac{1}{k}$, sottoposto ad una forza elettromotrice pari a $-\frac{1}{\omega} \sin \omega t$. La corrente $i(t)$ di un circuito con induttanza L e capacità C, governato da una forza elettromotrice $V(t)$ è infatti

$$Li''(t) + \frac{1}{C} i(t) = V'(t).$$

Esercizio 2. Sono date tre popolazioni $P(t)$ che evolvono rispettivamente secondo le tre leggi dinamiche descritte dalle equazioni:

(a) $P'(t) = P(t) + P^2(t)$
(b) $P'(t) = P(t)(1 - P(t))$
(c) $P'(t) = \dfrac{P(t)}{1 + P^2(t)}$

con $P(0) = P_0 > 0$.

In ciascuno dei casi: dire se la soluzione locale del Problema di Cauchy esiste ed è unica, disegnare il diagramma di fase e trovare, se esistono, punti di equilibrio, discutendone la stabilità ed esaminare la prolungabilità della soluzione.

Soluzione. Sia $P'(t) = P(t) + P^2(t) = f(P)$. Si osserva che $f(P)$ è continua per ogni P, e che $f'(P) = 1+2P$ è continua per ogni P. Si può applicare il teorema di esistenza ed unicità locale al problema di Cauchy in ogni punto della retta $(0, P)$. I punti di equilibrio sono 0 (instabile) e -1 (stabile), infatti dall'equazione $f(P) = P(t) + P^2(t)$ si ricava che la derivata prima di P è negativa se $-1 < P < 0$, e positiva o nulla negli altri casi. Si deduce il diagramma di fase riportato nella Figura 1. In base a considerazioni sul $f(P)$, non vale la condizione sufficiente di sublinearità su $(t, P) \in (a, b) \times \mathbf{R}$, quindi non è possibile dedurre, a priori, la prolungabilità della soluzione su (a, b). L'equazione proposta è però facilmente integrabile (a variabili separabili). Con le condizioni iniziali assegnate si ricava

$$P(t) = \frac{P_0}{1 + P_0 - P_0 e^t}.$$

Questa funzione presenta un asintoto verticale in $T = \log(1+\frac{1}{P_0})$ ed è, a posteriori, prolungabile come soluzione del problema di Cauchy assegnato nell'intervallo $(-\infty, \log(1 + \frac{1}{P_0}))$.

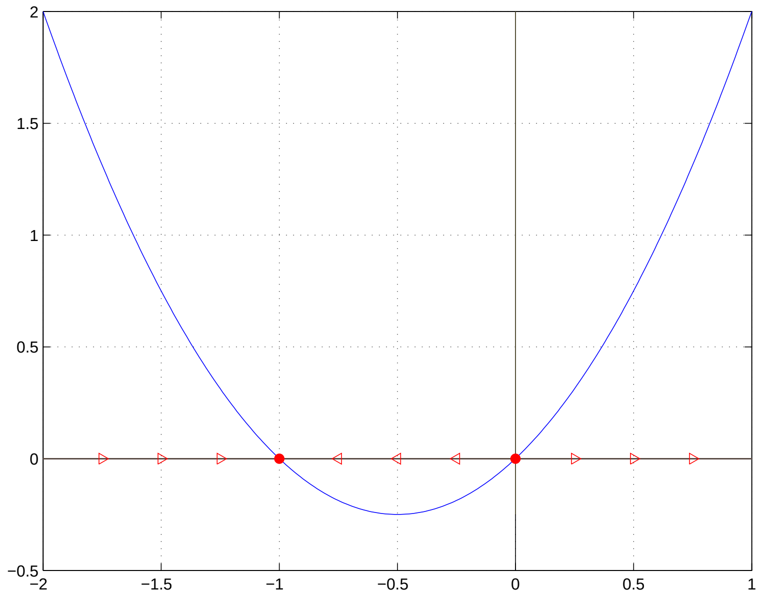

FIGURA 1. L'asse delle ascisse rappresenta il diagramma di fase dell'Esercizio 2(a).

L'equazione proposta è logistica, ben nota. Con una strategia analoga a quella utilizzata nel caso precedente si può dedurre che la soluzione esiste unica per ogni problema di Cauchy assegnato nel piano. I punti 0 ed 1 del diagramma (monodimensionale) di fase sono equilibri rispettivamente instabile e stabile. Non sono verificate le condizioni sufficienti di prolungabilità a priori della soluzione, ma da uno studio qualitativo del segno della derivata prima si deduce le soluzioni di problemi di Cauchy tali che $0 \leq P_0 \leq 1$ sono prolungabili in quanto funzioni monotone e limitate, mentre le soluzioni di problemi di Cauchy con $P_0 < 0$ o $P_0 < 1$ saranno, rispettivamente, prolungabili a sinistra e prolungabili a destra. In entrambi i casi la prolungabilità si deduce per non creare contraddizione con la monotonia e l'unicità della soluzione. Integrando l'equazione si ottiene

$$P(t) = \frac{P_0 e^t}{1 - P_0 + P_0 e^t}.$$

Per $0 \leq P_0 \leq 1$ il denominatore è sempre positivo e l'equazione esiste per ogni valore di t. Se $P_0 = 0$, si ricava per sostituzione $P(t) = 0$; se $P_0 = 1$, $P(t) = 1$. Se $P_0 > 1$, il denominatore si annulla in $\log(1 - \frac{1}{P_0}) < 0$, e la soluzione esiste in $(\log(1 - \frac{1}{P_0}), +\infty)$.

Sia $f(P) = \frac{P}{1+P^2}$. La soluzione locale al problema di Cauchy esiste ed è unica, essendo verificate le ipotesi del Teorema di Esistenza ed unicità. L'unico punto di equilibrio (instabile) è l'origine. La funzione $f(P)$ inoltre è limitata, e in particolare, è sublineare su tutto il suo insieme di definizione, che è R^2, essendo autonoma rispetto alla variabile t. Quindi, ogni soluzione è prolungabile su $\mathbf{R}$. Infine, l'equazione può essere facilmente integrata. In Figura 3 sono riportate, a titolo esemplificativo alcune soluzioni.

Esercizio 3. Sia dato il sistema lineare a coefficienti costanti

$$z' = Az \qquad \text{dove } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ (1+\alpha) & -5 \end{bmatrix}$$

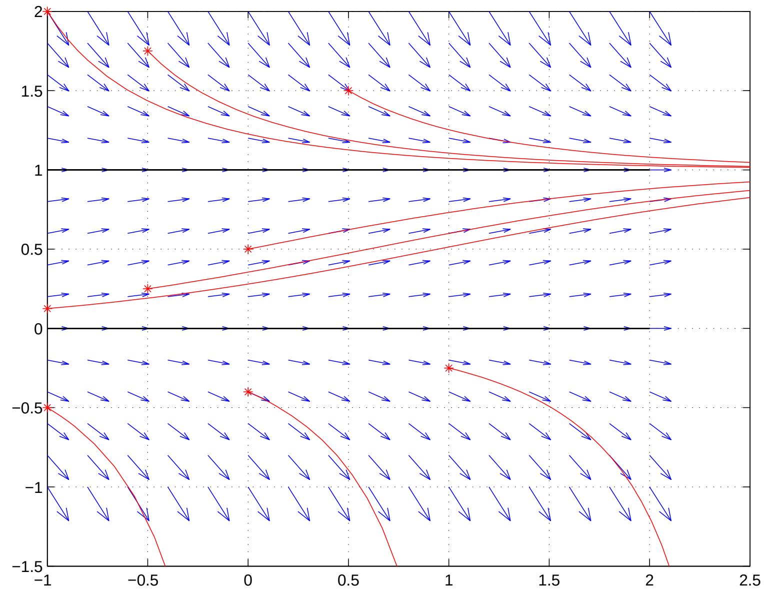

Figura 2. Studio qualitativo dell'equazione logistica ed alcune soluzioni ai problemi di Cauchy evidenziati per tempi crescenti.

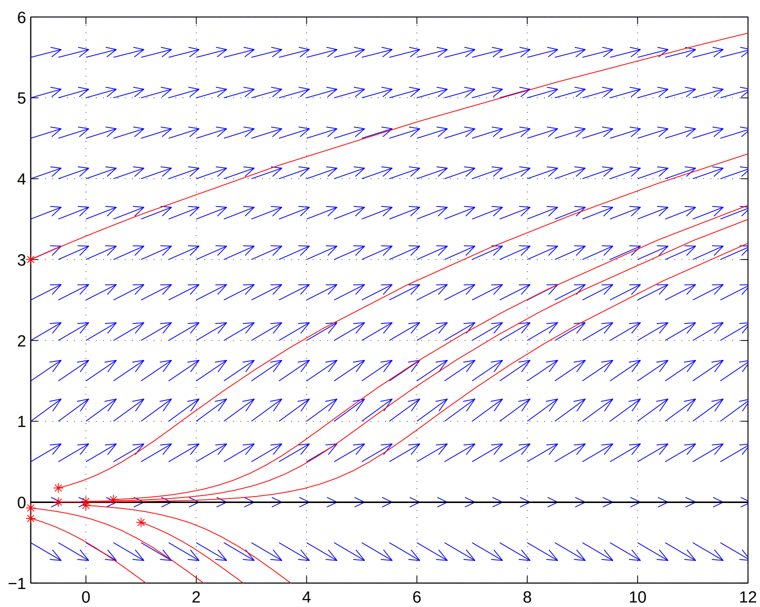

Figura 3. Studio qualitativo dell'equazione $P' = \frac{P}{1+P^2}$ ed alcune soluzioni ai problemi di Cauchy evidenziati per tempi crescenti.

con α parametro reale.

(a) Discutere, al variare del parametro α, la stabilità dell'origine nel piano delle fasi, classificando tale punto.
(b) Nel caso $\alpha = -1$,
  (a) determinare gli autovettori di A,

(b) calcolare la matrice e^{At},
(c) scrivere l'integrale generale del sistema,
(d) descrivere le traiettorie nell'intorno dell'origine.

Soluzione. (a) L'origine è l'unico punto critico se $\det A \neq 0$. Sia quindi $\det A \neq 0$, ovvero $\alpha \neq 3/2$. Gli autovalori sono $\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{6+2\alpha}$. Se $\alpha = -3$ gli autovalori sono reali e coincidenti, negativi, e l'origine è un nodo stabile (inoltre A non è diagonale per ciò il nodo non è un nodo a stella). Se $\alpha < -3$ gli autovalori sono complessi e coniugati con parte reale negativa, e l'origine è allora un fuoco stabile. Se $\alpha > -3$ gli autovalori sono reali e distinti. Se $-3 < \alpha < 3/2$, gli autovalori sono entrambi negativi, e l'origine è un nodo stabile. Se $\alpha > 3/2$ un autovalore è positivo e l'origine è un colle.

Rimane da analizzare il caso $\alpha = 3/2$. Gli autovalori sono $\lambda_{1,2} = 0, -6$. L'insieme dei punti critici del problema è dato dalle soluzioni del sistema

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(ovvero dall'autovettore associato all'autovalore $\lambda = 0$). L'autovettore associato a $\lambda_1 = 0$ è $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (e non corrisponde a una traiettoria rettilinea ma ad un insieme di punti critici), l'autovettore associato a $\lambda_2 = -6$ è $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ (e corrisponde a una traiettoria rettilinea). Siccome se $\det A = 0$ le righe di A sono linearmente dipendenti, si ricava immediatamente che $-\frac{5}{2}\dot{x} = \dot{y}$. Integrando, ottengo l'equazione delle traiettorie, che è un fascio di rette parallele $y(t) = -\frac{5}{2}x + C$. Ogni retta è un insieme di TRE traiettorie distinte: il punto critico (stabile) che la interseca, e due semirette che a quel punto si avvicinano da parti opposte.

(b) Siamo nel caso $-3 < \alpha < 3/2$.

(i) Gli autovalori sono $\lambda_{1,2} = -1, -5$, e gli autovettori relativi rispettivamente $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(ii) La matrice A viene diagonalizzata da $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ nella matrice

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Si ricava che

$$e^{At} = S e^{\widetilde{A}t} S^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-5t}\right) \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix}.$$

(iii) L'integrale generale del sistema è

$$z(t) = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(iv) Dalla discussione del punto (a) sappiamo che l'origine è un nodo stabile. Le traiettorie sono tangenti all'autovettore relativo all'autovalore minore in modulo, $\lambda_1 = -1$, ovvero all'asse orizzontale. Dal sistema

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -z_1 + 2z_2 \\ \dot{z}_2 = -5z_2 \end{cases}$$

si ricava che
$$\frac{dz_1}{dz_2} = \frac{1}{5z_2} z_1 - \frac{2}{5}$$
che è un'equazione lineare in z_1 rispetto alla variabile z_2. Integrata, si ottiene l'equazione delle traiettorie
$$z_1 = z_2^{1/5}(C - \frac{1}{2} z_2^{3/5}).$$

. ——————————————— .

23 aprile 2003

Esercizio 1. Sia data l'equazione differenziale
$$y' = |y|(1-y)$$

(1) Enunciare il Teorema di Esistenza e Unicità locale e discuterne l'applicabilità all'equazione assegnata.
(2) Discutere la prolungabilità a priori delle soluzioni dell'equazione.
(3) Disegnare il campo di direzioni, lo spazio delle fasi, e l'andamento qualitativo delle soluzioni.
(4) Integrare l'equazione differenziale e risolvere i seguenti problemi di Cauchy: $y(0) = 1/2$, $y(0) = -1$, $y(0) = 2$. Infine, commentare i risultati ottenuti riguardo la prolungabilità effettiva delle soluzioni.

Soluzione.

(a) Si applica il Teorema di Esistenza e Unicità locale, con ipotesi di L-continuità locale (Teorema 1.2, Pagani-Salsa, pag. 209). La funzione $f(t, y) = |y|(1-y)$ è L-continua in y, uniformemente rispetto a t, infatti
$$\begin{aligned} |f(t,y_1) - f(t,y_2)| &= \big||y_1|(1-y_1) - |y_2|(1-y_2)\big| \\ &\le \big||y_1| - |y_2|\big| + \big||y_1|y_1 - |y_2|y_2\big| \\ &\le |y_1 - y_2| + \big||y_1|y_1 - |y_1|y_2 + |y_1|y_2 - |y_2|y_2\big| \\ &\le |y_1 - y_2|(1 + |y_1| + |y_2|). \end{aligned}$$
Si deduce dalla disuguaglianza precedente che per ogni punto $(t_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ esiste un intorno $\mathcal{U}(t, y)$ tale che per ogni punto in $\mathcal{U}(t, y)$
$$\big|f(y_1) - f(y_2)\big| \le L|y_1 - y_2|$$
con $L = 1 + 2\sup_{y\in\mathcal{U}} |y|$. Ne segue che esistenza ed unicità locali sono garantite per ogni $(t_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$.

Nel caso in cui il Teorema di Esistenza ed Unicità venisse enunciato con l'ipotesi $f(t, y)$, continua con la sua derivata rispetto ad y, in un aperto $A \subset \mathbf{R}^2$ -ipotesi più restrittive della L-continuità- si potrebbe garantire esistenza ed unicità della soluzione nei semipiani $y > 0$ e $y < 0$, e si può garantire esistenza, ma non unicità della soluzione sulla retta $y = 0$.

(b) Per ogni striscia $[a, b] \times \mathbf{R}$, la funzione $f(y)$ non è limitata né sublineare. Il Teorema di Prolungamento non può essere dunque applicato.

(c) La Figura 4 riporta gli andamenti qualitativi cercati.

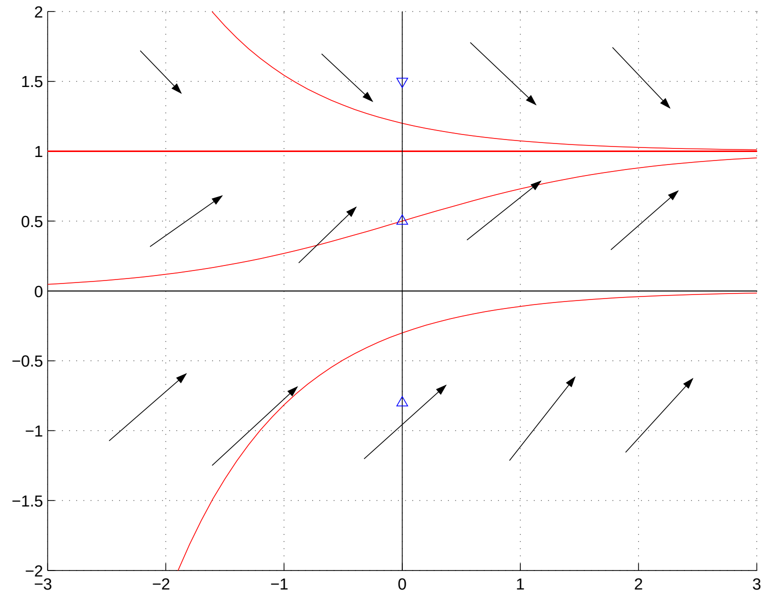

FIGURA 4. Andamento qualitativo, diagramma di fase e campo delle direzioni delle soluzioni

(d) Si ricava immediatamente che $y = 0$ ed $y = 1$ sono integrali particolari. Supponendo quindi $y \neq 0, 1$ possiamo integrare l'equazione separando le variabili:

$$\frac{dy}{|y|(1-y)} = dt$$

(si osservi che nel semipiano $y \geq 0$ l'equazione coincide con l'equazione logistica). Se $y > 0$ l'integrale generale è

$$y = \frac{k}{k + e^{-t}}$$

se $y < 0$ l'integrale generale è

$$y = \frac{1}{1 + ke^{t}}.$$

Le soluzioni dei problemi di Cauchy richiesti sono
$y(0) = 2 \Rightarrow y = \dfrac{2}{2 - e^{-t}}$ che è definita per $t > -\log 2$,
$y(0) = 1/2 \Rightarrow y = \dfrac{1}{1 + e^{-t}}$ che è definita per $t \in (-\infty, +\infty)$,
$y(0) = -1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{1 - 2e^{t}}$ che è definita per $t > -\log 2$. La prolungabilità effettiva delle soluzioni in $+\infty$ può essere ricavata solo con il calcolo diretto.

Esercizio 2. L'equazione

$$L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{d}{dt}E(t) \qquad R, L, C > 0$$

descrive la corrente $I(t)$ in un circuito con una resistenza R, una induttanza L e una capacità C collegate in serie, cui è stata applicata la forza elettromotrice $E(t)$.

Per il problema omogeneo, $E(t)$ costante, scrivere un sistema di equazioni differenziali del primo ordine equivalente all'equazione e si studi la stabilità del punto critico $(0,0)$ al variare dei parametri L e C, fissando per semplicità $R = 1$ Ohm. Disegnare le traiettorie nei vari casi.

Soluzione. L'equazione

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0$$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\dfrac{1}{CL}x - \dfrac{R}{L}y \end{cases}$$

dove si è posto $x = I$ e $y = \dot{I}$. Nel caso particolare di $R = 1$ Ohm, sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{CL} & -\dfrac{1}{L} \end{bmatrix}$$

e $\det A = \dfrac{1}{CL}$, $\mathrm{tr}A = -\dfrac{1}{L}$. Gli autovalori di A sono

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2L} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{L^2} - \frac{4}{CL}}.$$

Discutiamo ora le possibili traiettorie.

$C = 4L$**:** $\Delta = 0$, autovalori sono reali, coincidenti e negativi: l'origine è un nodo stabile ad una sola tangente $\begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2L} \end{bmatrix}$.

$C > 4L$**:** $\Delta > 0$, autovalori reali distinti e negativi. L'origine è un nodo stabile. Gli autovettori associati ai due autovalori sono

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2L}\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{4L}{C}}\right) \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{1}{2L}\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{4L}{C}}\right) \end{bmatrix}.$$

$0 < C < 4L$**:** $\Delta < 0$, autovalori complessi e coniugati con parte reale negativa. L'origine è un fuoco asintoticamente stabile.

Esercizio 3. Dato il sistema $\dot{\mathbf{z}} = A\mathbf{z}$ di equazioni differenziali

$$\begin{cases} \dot{x} &= x + 2y \\ \dot{y} &= -2x + y \end{cases}$$

(1) determinare la matrice e^{At},
(2) scrivere l'integrale generale del sistema,
(3) disegnare alcune traiettorie nel piano delle fasi.

Soluzione. Da $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ si ricava che il suo polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ cui corrispondono gli autovalori $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2\mathrm{i}$, i cui relativi autovettori sono $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \pm \mathrm{i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Costruiamo la matrice

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e la matrice

$$e^{\tilde{A}t} = e^t \begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}.$$

Come è noto risulta

$$e^{At} = Se^{\tilde{A}t}S^{-1} = e^t \begin{bmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}.$$

(b) L'integrale generale del sistema è

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Se^{\tilde{A}t} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

(c) Alcune traiettorie sono riportate nella Figura 5. Il luogo dei punti a tangente orizzontale è la retta $y = 2x$ (in blu nella figura), il luogo dei punti a tangente verticale ha equazione $y = -\dfrac{1}{2}x$ (color magenta in figura). Per ricavare il verso di avvitamento delle spirali, si può valutare il sistema sui punti appartenenti all'asse x, per i quali cioé $y = 0$. Il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= -2x \end{cases}$$

è evidente he un punto con coordinata x positiva ha $dx > 0$ e $dy < 0$. Se ne ricava un verso di avvolgimento come quello riportato nella figura in corrispondenza del punto $P = (0.1, 0)$.

Esercizio 4. Ricordando l'enunciato del Teorema di Esistenza ed Unicità locale per il problema di Cauchy, si dimostri che l'equazione $\dot{y} = f(y)$ con $f \in C^1(\mathbf{R})$ non può avere soluzioni periodiche non costanti.

Soluzione. Discutiamo innanzi tutto il segno della derivata prima:

$$y' \geq 0 \iff f(y) \geq 0$$

(ricordiamo che le soluzioni vanno interpretate nel piano (t, y)). Per fissare le idee, consideriamo l'equazione $y' = y^2 + y - 6$;

$$y' \geq 0 \iff y^2 + y - 6 \geq 0 \iff y \leq -3 \text{ e } y \geq 2$$

il cui campo di direzioni è rappresentato in Figura 6. Ogni equazione autonoma del tipo $y' = f(y)$ ha un campo di direzioni che divide il piano t, y in fasce orizzontali.

Per rispondere al quesito posto nell'esercizio si ragiona per assurdo. Supponiamo che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

abbia una soluzione $y(t)$ periodica non costante. Diciamo che ha periodo T, necessariamente $y(t+T) = y(t)$ per ogni t e quindi $y(t_0+T) = y_0 = y(t_0)$. Supponiamo che il problema di Cauchy

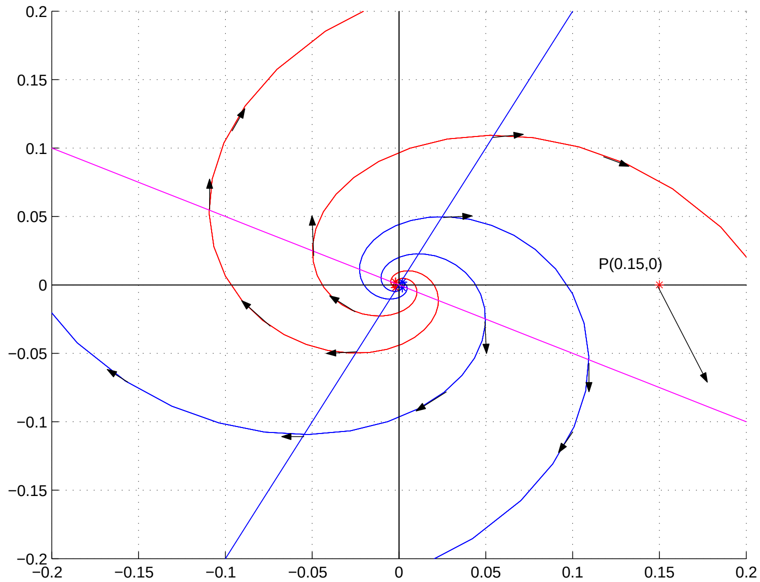

FIGURA 5. Traiettorie del sistema proposto nell'Esercizio 3.

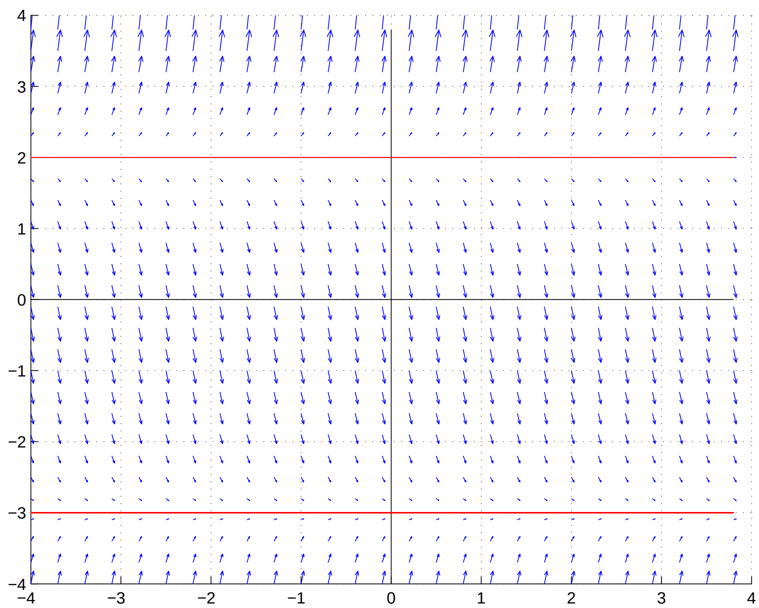

FIGURA 6. Campo delle direzioni per l'equazione $y' = y^2 + y - 6$.

sia stato assegnato in una striscia in cui $f(y_0) > 0$: per considerazioni basate sull'unicità della soluzione y deve rimanere nella striscia dove la sua derivata è positiva, ma ciò è in contraddizione con il fatto che dopo un tempo T la soluzione assuma la stessa quota.

5 maggio 2003

Esercizio 1.

(a) Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

trovare autovalori e autospazi associati. Determinare per quali vaori del parametro reale k la matrice A risulta diagonalizzabile.

(b) Scrivere in forma esplicita il sistema $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$.

(c) Nel caso $k = 2$, scrivere l'integrale generale del sistema $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$.

Soluzione.

(a) Gli autovalori sono $\lambda = 3, 1 \pm \mathrm{i}k$. Se $k \neq 0$, gli autovalori sono distinti, quindi regolari, quindi la matrice A risulta diagonalizzabile. Se $k = 0$ occorre verificare la regolarità dell'autovalore $\lambda = 1$. Sia quindi $k = 0$, gli autovettori associati all'autovalore $\lambda = 1$ risolvono il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

la cui soluzione è lo spazio vettoriale generato dal vettore $(0, 1, 0)$ e $(1, 0, 0)$; l'autovalore $\lambda = 1$ è quindi regolare. Se ne deduce che A è diagonalizzabile se $k = 0$.

Sia ora $k \neq 0$. Un autovettore associato a $\lambda = 3$ è $v_1 = 4, -2k, 4 + k^2$. Gli autovettori associato a $\lambda = 1 \pm \mathrm{i}k$ risolvono $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Si ricava immediatamente che $x_3 = 0$, quindi il sistema è equivalente a

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Di cui una soluzione è $x_2 = \pm \mathrm{i} x_1$. Tre autovettori linearmente indipendenti di A sono dunque

$$v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2k \\ 4 + k^2 \end{bmatrix} \qquad v_2, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \pm\mathrm{i} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t) + ky_2(t) + 2y_3(t) \\ \dot{y}_2(t) = -ky_1(t) + y_2(t) \\ \dot{y}_3(t) = 3y_3(t) \end{cases}$$

(c) Sia $k = 2$. Si considera la matrice S ottenuta accostando i vettori $\frac{1}{4}v_1$ e la parte reale e la parte immaginaria di v_2 e v_3:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

È noto che

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

e che

$$e^{S^{-1}ASt} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ 0 & -e^t \sin 2t & e^t \cos 2t \end{bmatrix}.$$

L'integrale generale del sistema è perciò

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ 0 & -e^t \sin 2t & e^t \cos 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

ovvero

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{3t} + e^t(c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t) \\ y_2(t) = -c_1 e^{3t} + e^t(-c_2 \sin 2t + c_3 \cos 2t) \\ y_3(t) = 2c_1 e^{3t}. \end{cases}$$

Esercizio 2. Sia data l'equazione differenziale ordinaria

$$y' = \frac{2t}{t^2-1}(y-1).$$

(1) Dopo aver enunciato il Teorema di Esistenza ed Unicità locale per le soluzioni del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, specificare in quale campo $A \subseteq \mathbf{R}^2$ il Teorema garantisce esistenza ed unicità della soluzione all'equazione assegnata.
(2) Studiare nel piano (t, y) il segno di y'.
(3) Scrivere l'integrale generale dell'equazione.
(4) Trovare la linea integrale che risolve il problema di Cauchy $y(2) = 3$.
(5) Specificare il dominio massimale della soluzione trovata al punto d), osservando se poteva essere previsto a priori.
(6) Trovare le linee integrali tangenti alle funzione $u(t) = e^t + 1$, e scrivere le tangenti comuni.

Soluzione.

(a) **Teorema.** Sia data $z = f(t, y)$ continua nell'aperto $A \subseteq \mathbf{R}^2$ e tale che $\frac{\partial f}{\partial y}$ sia pure continua in A. Allora il problema di Cauchy $y(t_0) = y_0$, con $(t_0, y_0) \in A$, assegnato per l'equazione differenziale $y' = f(t, y)$ ammette una ed una sola soluzione locale.
La funzione $z = \dfrac{2t}{t^2-1}(y-1)$ è continua insieme alla sua derivata parziale rispetto alla variabile y nell'aperto $A_1 = (-\infty, 1) \times \mathbf{R}$ oppure in $A_2 = (-1, 1) \times \mathbf{R}$ oppure in $A_3 = (1, +\infty) \times \mathbf{R}$. I problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{2t}{t^2-1}(y-1) \\ y(t_0) = y_0 \\ (t_0, y_0) \in A_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \frac{2t}{t^2-1}(y-1) \\ y(t_0) = y_0 \\ (t_0, y_0) \in A_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \frac{2t}{t^2-1}(y-1) \\ y(t_0) = y_0 \\ (t_0, y_0) \in A_3 \end{cases}$$

ammettono, rispettivamente, soluzione locale unica.

(b) In A_1 la soluzione cresce se $y > 1$; decresce se $y < 1$; ha tangente orizzontale se $y = 1$. In A_2 la soluzione cresce se $y > 1$ e $t < 0$ oppure se $y < 1$ e $t > 0$; decresce se $y > 1$ e $t > 0$ oppure se $y < 1$ e $t < 0$; ha tangente orizzontale se $t = 0$ e se $y = 1$.
In A_3 la soluzione cresce se $y > 1$; decresce se $y < 1$; ha tangente orizzontale se $y = 1$.

(c) La funzione $y = 1$ è soluzione del problema separatamente negli aperti A_1, A_2, A_3. L'equazione è lineare e può essere integrata separatamente negli aperti A_1, A_2, A_3. L'equazionepuò anche essere integrata come equazione a variabili separabili separatamente negli aperti A_1, A_2, A_3:
$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{2tdt}{t^2-1}$$
$$\log|y-1| = \log|t^2-1| + C = \log|t^2-1| + \log K = \log K|t^2-1|$$
con C costante arbitraria. Si osservi che $K > 0$. Conglobando i moduli nel segno della costante L, si ottiene l'integrale generale
$$y = L(t^2-1) + 1.$$

(d) $y = \frac{2}{3}(t^2-1) + 1$.

(e) La funzione definita in d) risolve l'equazione differenziale nell'aperto $(1, +\infty)$ (intervallo massimale). Ragionando a priori, il Teorema di prolungamento può essere applicato nella striscia $S = [a, b] \times \mathbf{R}$, con $a > 1$ e $a < b < +\infty$. Infatti la funzione $f(t, y) = \dfrac{2t}{t^2-1}(y-1)$ è il prodotto di due funzioni $g(t) = \dfrac{2t}{t^2-1}$ e $h(y) = (y-1)$: $g(t)$ è continua sull'intervallo $[a, b]$ (chiuso e limitato) quindi è una funzione limitata dal suo massimo M; $h(y)$ è una funzione lineare. Ne risulta
$$\left| \frac{2t}{t^2-1}(y-1) \right| \le M|y-1|$$
in S. Dall'arbitrarietà di a e di b si deduce che la soluzione può essere prolungata in tutto A_3.

(f) Da $y = e^t + 1$ si ricava $y' = e^t$, e sostituendo nell'equazione differenziale
$$e^t = \frac{2t}{t^2-1}e^t$$
da cui $t = 1 \pm \sqrt{2}$. Nei punti di ascissa $t = 1 \pm \sqrt{2}$ e ordinata $e^{1\pm\sqrt{2}} + 1$, la funzione $y(t) = e^t + 1$ e le linee integrali del problema proposto hanno tangente comune. Le linee integrali cercate quindi risolvono i problemi di Cauchy $(t_1, y_1) = (1-\sqrt{2}, e^{1-\sqrt{2}} + 1)$ e $(t_2, y_2) = (1+\sqrt{2}, e^{1+\sqrt{2}} + 1)$ e sono, rispettivamente
$$y = \frac{e^{1-\sqrt{2}}}{2-2\sqrt{2}}(t^2-1) + 1 \qquad y = \frac{e^{1+\sqrt{2}}}{2+2\sqrt{2}}(t^2-1) + 1.$$
Le rette tangenti richieste
$$y = 1 + e^{1-\sqrt{2}} + e^{1-\sqrt{2}}(t - 1 + \sqrt{2}) \qquad y = 1 + e^{1+\sqrt{2}} + e^{1+\sqrt{2}}(t - 1 - \sqrt{2}).$$

Esercizio 3. Sia data l'equazione
$$u^{(5)}(t) - 13u^{(3)}(t) + 36u'(t) = 0.$$
Scrivere un sistema del primo ordine ad essa equivalente e se ne trovino gli autovalori.

Soluzione. Con la scelta

$$\begin{aligned} u(t) &= x_1(t) \\ u'(t) &= x_2(t) \\ u''(t) &= x_3(t) \\ u'''(t) &= x_4(t) \\ u''''(t) &= x_5(t) \end{aligned}$$

si ricava il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = x_5 \\ \dot{x}_5 = 13x_4 - 36x_2 \end{cases}.$$

Gli autovalori del sistema risolvono l'equazione caratteristica

$$\lambda^5 - 13\lambda^3 + 36\lambda = 0.$$

Risulta

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^5 - 13\lambda^3 + 36\lambda \\ &= \lambda(\lambda^4 - 13\lambda^2 + 36) \\ &= \lambda(\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 9) \\ &= \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3)(\lambda + 3). \end{aligned}$$

Gli autovalori sono $\lambda_{1,2,3,4,5} = 0, +2, -2, +3, -3$.

Esercizio 4. Una vasca contiene 100 litri d'acqua pura. All'istante t=0 una miscela contenente un chilogrammo di sale in ogni litro viene immessa nella vasca alla velocità di mezzo litro al minuto; il sale si diluisce anche nell'acqua della vasca. La mistura esce attraverso una condotta di scarico alla stessa velocità con cui vi è stata introdotta. Dopo quanto tempo ci saranno 20 chilogrammi di sale sciolti nella vasca?

Soluzione. Sia $s(t)$ la quantità di sale disciolta nella vasca all'istante t, misurata in Kg. La variazione del sale presente è data dalla differenza tra la quantità di sale entrante ($\frac{1}{2}\mathrm{Kg}/\min$) e la quantità di sale uscente $\left(\frac{1}{2}\frac{\text{litri}}{\text{min}}\frac{s(t)}{100}\frac{\text{Kg}}{\text{litri}}\right)$. L'equazione differenziale che descrive il sistema è

$$s'(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{200}s(t)$$

che è lineare, ed integrata fornisce

$$s(t) = 100 - Ce^{-t/200}$$

con C costante da determinarsi in base alle condizioni iniziali. Se all'istante $t = 0$ nella vasca non è presente sale e si suppone che la miscela venga versata in modo continuo, deve essere $s(0) = 0$, da cui si deduce $C = 100$.

L'istante t_1 in cui la vasca contiene 20Kg di sale risolve l'equazione

$$20 = 100 - 100e^{-t_1/200}$$

ovvero $t_1 = 200 \log \frac{5}{4} \approx 44$ min.

. ——————————— .

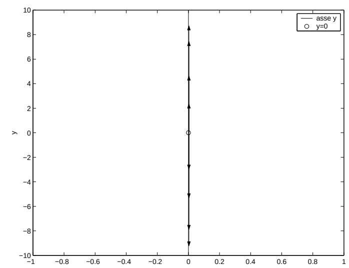

FIGURA 7

7 maggio 2004

Esercizio 1. Sia data l'equazione differenziale
$$(1+y^2)y' - y = 0.$$

Previsioni in base alla teoria (senza integrare l'equazione, ma enunciando il teorema opportuno e verificandone le ipotesi).

(a.1) Il problema di Cauchy $y(x_0) = y_0$ ha soluzione unica locale?
(a.2) Se e dove è possibile prolungare le soluzioni?

Studio qualitativo delle soluzioni.

(b.1) Discutere il diagramma di fase o un grafico delle pendenze della soluzione.
(b.2) Discutere la concavità e la convessità della soluzione.
(b.3) È possibile prevedere l'esistenza di asintoti orizzontali?
(b.4) Disegnare l'andamento qualitativo delle traiettorie che risolvono il problema di Cauchy $y(0) = \alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$.
(c) Integrare l'equazione e risolvere il problema di Cauchy $y(-3) = 1$.

Soluzione.

(a.1) Per l'enunciato si veda il Teorema di Esistenza ed Unicità locale 1.1 a pagina 5.
Abbiamo $f(x,y) = \dfrac{y}{1+y^2}$ e $A = \mathbf{R}^2$. La funzione $f(x,y)$ è continua in A così come la sua derivata
$$f_y(x,y) = \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}$$
quindi sono verificate le ipotesi del teorema, e la soluzione locale esiste unica per ogni $(x_0, y_0) \in A$.

(a.2) Per l'enunciato si veda il Lemma 2.1 a pagina 21.
Consideriamo $a, b \in \mathbf{R}$ fissati qualsiasi ed $S = (a,b) \times \mathbf{R}$. La funzione f è $C^1(\overline{S})$ ed è limitata in $\overline{S}$:
$$\left| \frac{y}{1+y^2} \right| \leq 1.$$
Quindi la soluzione è prolungabile a tutto $[a,b]$. Siccome a e b sono qualsiasi, la soluzione è prolungabile su tutto $\mathbf{R}$.

(b.1) La retta della fase è riportata nella Figura 7. Si osserva che $y = 0$ è l'unica soluzione stazionaria e che risulta *instabile*.

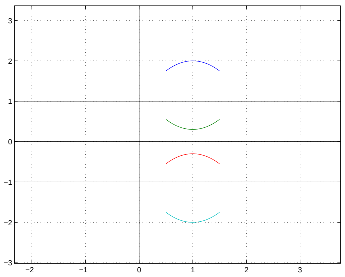

FIGURA 8

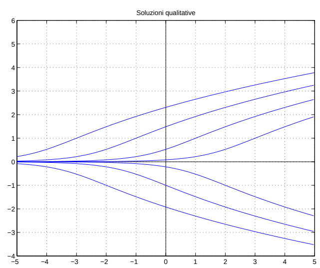

FIGURA 9

(b.2) Derivando rispetto al tempo si ricava

$$y'' = \frac{y(1-y^2)}{(1+y^2)^3}$$

perciò le rette $y = 0$ ed $Y = \pm 1$ sono un luogo di flessi. La concavità e convessità risultanti sono riportate nella Figura 8.

(b.3) Le soluzioni esistono su $\mathbf{R}$ e sono strettamente monotone (o crescenti o decrescenti a seconda del semipiano dove si trovano). È dunque possibile che esistano degli asintoti orizzontali.

Sia $x \to -\infty$. Certamente la funzione ammette asintoto orizzontale essendo monotona e limitata. Occorre capire se l'asintoto è la retta $y = 0$ o se è una retta $y = l \neq 0$. Supponiamo che $y = l$ sia asintoto, allora

$$\lim_{x\to-\infty} y'(x) = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{1+y^2} = \frac{l}{1+l^2}$$

necessariamente $l = 0$.

Sia $x \to +\infty$. Supponiamo che la funzione ammetta asintoto orizzontale $y = l$. Osservate che l non può essere 0 perchè si è già provato che il sistema è instabile. Allora,

$$\lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{1+y^2} = \frac{l}{1+l^2}$$

che è falso per ogni valore di $l \neq 0$. Quindi non esiste asintoto per $x \to +\infty$.

(b.4) L'andamento qualitativo delle traiettorie si differenzia se $\alpha \lesseqgtr 0$. In Figura 9 sono riportati degli esempi .

(c) L'equazione è a variabili separabili. Formalmente quindi ricaviamo:

$$\int \frac{1+y^2}{y}\, dy = \int dx$$

da cui
$$\log|y| + \frac{y^2}{2} = x + C.$$
Imponendo la condizione iniziale si ricava $C = 7/2$.

Esercizio 2. Sia dato il sistema
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

(a) Trovare gli autovalori della matrice dei coefficienti A.

(b) Determinare e^{At}.

(c) Scrivere l'integrale generale del sistema.

(d) Trovare la soluzione che soddisfa il problema di Cauchy $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

(e) Disegnare il diagramma di fase e classificare l'origine.

Soluzione.

(a) Gli autovalori di A sono $\lambda_{1,2} = 1 \pm \mathrm{i}$.

(b) Gli autovettori associati agli autovalori risolvono l'equazione $\pm x\mathrm{i} = y$, ovvero hanno la forma
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \pm \mathrm{i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
La matrice S che si ottiene accostando la parte reale e la parte immaginaria degli autovettori coincide con la matrice identica $\mathbb{I}$, infatti A si trova già nella forma canonica
$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$
dove a e b sono la parte reale e la parte immaginaria degli autovalori complessi e coniugati. Si ottiene perciò:
$$e^{At} = e^t \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

(c)
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

(d) La soluzione cercata è
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t(\cos t - \sin t) \\ e^t(\sin t + \cos t) \end{bmatrix}$$
che si ottiene con $C_1 = C_2 = 1$.

(e) L'insieme delle traiettorie è disegnato in Figura 10, dove sono riportati anche i versi di percorrenza delle traiettorie in corrispondenza degli assi e i luoghi dei punti a tangente orizzontale e verticale. L'origine è un fuoco instabile.

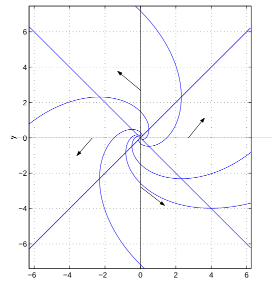

FIGURA 10

Esercizio 3. È data l'equazione lineare a coefficienti costanti

$$y'' + 4y' + 4y = \sin t + e^{-2t}$$

rappresentante una molla con coefficiente di attrito $\mu = 4$ e costante elastica $k = 4$.

(a) Trovare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata.

(b) Trovare l'integrale generale dell'equazione completa.

Soluzione.

(a) L'equazione caratteristica ha $\lambda = -2$ come autovalore doppio; l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dunque

$$u(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}.$$

(b) Applichiamo il principio di sovrapposizione. Con il metodo di similitudine un integrale particolare dell'equazione $u'' + 4u' + 4u = \sin t$ può essere cercato tra quelli della forma $u(t) = A \sin t + B \cos t$. Questo risolve l'equazione scegliendo $A = 3/25$ e $B = -4/25$. Analogamente, un integrale particolare dell'equazione $u'' + 4u' + 4u = e^{-2t}$ può essere cercato tra quelli della forma $u(t) = At^2 e^{-2t}$. Questo risolve l'equazione scegliendo $A = 1/2$. L'integrale generale è quindi:

$$u(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} + \frac{3}{25} \sin t - \frac{4}{25} \cos t + \frac{1}{2} t^2 e^{-2t}.$$

Esercizio 4. Un modello per la diffusione di un'epidemia in una popolazione composta da un numero costante N di individui si basa sull'ipotesi che la variazione di individui infetti sia contemporaneamente proporzionale al numero di individui infetti $I(t)$ e al numero di individui sani $S(t)$ secondo una costante di proporzionalità, che possiamo porre 1 per semplicità.

(a) Scrivere un'equazione differenziale che descrive il modello, dando le opportune limitazioni alle variabili affinché abbiano significato fisico.

(b) In una città isolata con 1000 abitanti, se 100 individui sono infetti al tempo t_0, in quanto tempo viene contagiato l'80% della popolazione, secondo il modello proposto?

Soluzione.

(a) Secondo la descrizione del modello deve essere
$$\dot{I}(t) = kI(t)S(t)$$
e la costante di proporzionalità è scelta $k = 1$. Perchè abbiano il significato assegnato le variabili devono soddisfare ad ogni istante t le condizioni
$$0 \leq I(t), S(t) \leq N$$
essendo N in numero totale di individui. Se si segue l'evoluzione del sistema si può porre $t \geq 0$ essendo 0 l'istante in cui cominciano i rilevamenti.

Tenendo conto che deve essere $S + I = N$, l'equazione diventa
$$\dot{I}(t) = I(t)(N - I(t))$$
che è l'equazione logistica.

(b) L'equazione $\dot{I} = I(1000 - I)$ a variabili separabili integrata diventa
$$I(t) = \frac{1000Ke^{1000t}}{1 + Ke^{1000t}}.$$
Scelto $t_0 = 0$ ed imposta la condizione iniziale, si ottiene $K = 1/9$ da cui
$$I(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-1000t}}.$$
Il valore di t in cui si è ammalato l'80% della popolazione si ricava risolvendo $1 + 9e^{-1000t} = 5/4$, da cui
$$t = \frac{1}{1000} \log 36.$$

Esercizio 5.

(a) Enunciare il Teorema delle contrazioni (Banach-Caccioppoli).

(b) Dimostrare il risultato di unicità previsto nel Teorema.

. ———————————— .